VISELKEDÉSÖKOLÓGIAI KUTATÓCSOPORT
DEBRECENI EGYETEM
EVOLÚCIÓS ÁLLATTANI ÉS HUMÁNBIOLÓGIAI TANSZÉK

Précsényi István
speciálkollégiuma alapján összeállította:
Barta Zoltán, Karsai István és **Székely Tamás**

Alapvető kutatástervezési, statisztikai és projectértékelési módszerek a szupraindividuális biológiában

KOSSUTH EGYETEMI KIADÓ
DEBRECENI EGYETEM

Debrecen, 2000

VISELKEDÉSÖKOLÓGIAI KUTATÓCSOPORT
DEBRECENI EGYETEM
EVOLÚCIÓS ÁLLATTANI ÉS HUMÁNBIOLÓGIAI TANSZÉK

Précsényi István
speciálkollégiuma alapján összeállította:
Barta Zoltán, Karsai István és **Székely Tamás**

Alapvető kutatástervezési, statisztikai és projectértékelési módszerek a szupraindividuális biológiában

Debrecen, 2000

Lektorálta:

Dr. Lendvai Gábor

Kiadta: a Debreceni Egyetem Kossuth Egyetemi Kiadója
Felelős kiadó: Cs. Nagy Ibolya főszerkesztő
Készült: a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzemében,
15,02 A/5 ív terjedelemben
2000-56

Tartalom

Előszó 1
Javasolt irodalom 2
Köszönetnyilvánítás 3
1. A szupraindividuális biológiai kutatás tervezése (Karsai István) 4
1.1. A vizsgálati objektum kiválasztása 4
1.1.1. Antropomorfizmus 5
1.2. A természettudományos kutatás lépései 5
1.2.1. Az elővizsgálatok és a kérdésfeltevés 6
1.2.2. A hipotézisek megalkotása 6
1.2.3. Predikciók levonása 7
1.2.4. Változók kiválasztása 7
1.2.5. Felvételi módszer a választott paraméterek mérésére 7
1.2.6. Mintanagyság 8
1.2.7. Csoporthatás a minták között 9
1.2.8. A megfigyelő hatása 9
1.2.9. Adatanalízis és a kutatás öngerjesztő tulajdonsága 10
1.2.10. Mit jelentenek eredményeink? 10
1.2.11. A vizsgálat ismételhetősége 11
1.3. A biológiai kutatások etikája 12
2. A kísérlettervezés (Székely Tamás) 13
2.1. A kísérlet elemei 13
2.2. A kísérletezés szabályai 14
2.2.1. Változók kontrollálása 14
2.2.2. Randomizálás 14
2.2.3. Ismétlés 15
2.3. A kísérletezés korlátai 15
2.4. Kísérleti elrendezések 16
2.4.1. Tökéletesen random elrendezés 16
2.4.2. Blokk elrendezés 16
2.4.3. Latin négyzet 18
2.4.4. Faktoriális elrendezés 18
3. Az adatok statisztikai jellemzése és hipotézisek vizsgálata (Barta Zoltán és Székely Tamás) 20
3.1. Statisztikai alapfogalmak 20
3.1.1. Terminológia 20
3.1.2. Az elméleti eloszlások 21
3.2. Adatjellemzés 23
3.2.1. A táblázatok 23
3.2.2. Az adateloszlások ábrázolása 24
3.2.2.1. A törzsdiagram 24
3.2.2.2. Oszlopdiagram 25
3.2.3. Eloszlások jellemzése 26
3.2.3.1. Átlag 26
3.2.3.2. Medián 27
3.2.3.3. Variancia és szórás 28
3.2.3.4. Interkvartilis tartomány 29
3.2.3.5. Az átlag szórása 30
3.3. Hipotézisvizsgálat 31
3.3.1. Bevezetés 31
3.3.2. Döntéshozás 31

3.3.3. A próba ereje ... 33
4. Paraméteres próbák (Barta Zoltán) ... 37
4.1. Bevezetés ... 37
4.2. Az egymintás próbák ... 37
4.2.1. Egymintás t-próba ... 37
4.2.2. A mintából számított variancia nagyságának tesztelése ... 37
4.3. Kétmintás próbák ... 38
4.3.1. F-próba ... 38
4.3.2. Páros t-próba ... 39
4.3.3. Kétmintás t-próba ... 40
4.3.4. Kétmintás t-próba a szórások különbözősége esetén (Welch-próba) 41
4.4. Varianciaanalízis ... 42
4.4.1. Bevezetés ... 42
4.4.2. Számításmenet ... 44
4.4.3. Csoportok közötti összehasonlítások ... 46
4.4.3.1. Előre tervezett összehasonlítások ... 47
4.4.3.2. Előre nem tervezett összehasonlítások ... 49
4.5. Kétfaktoros varianciaanalízis ... 51
4.5.1. Számításmenet egyenlő mintanagyságokra ... 51
4.6. A varianciaanalízis feltételei ... 54
4.6.1. Random mintavétel ... 54
4.6.2. Függetlenség ... 55
4.6.3. Normalitás ... 55
4.6.4. Varianciák homogenitása ... 55
4.6.4.1. Fmax-próba ... 55
4.6.4.2. Bartlett-próba ... 56
4.7. Transzformációk ... 57
4.7.1. Logaritmikus transzformáció ... 57
4.7.2. Négyzetgyök-transzformáció ... 57
4.7.3. Arcussinus-transzformáció ... 57
4.8. Regresszióanalízis ... 58
4.8.1. Bevezetés ... 58
4.8.2. A regresszióanalízis feltételei ... 59
4.8.3. Számításmenet ... 59
4.8.4. Szignifikancia-vizsgálat ... 60
4.9. Korrelációanalízis ... 63
4.9.1. Bevezetés ... 63
4.9.2. Számításmenet ... 63
4.9.3. A korrelációs koefficiens próbája ... 64
4.10. A kovariancia-analízisről ... 65
4.10.1. Számításmenet ... 65
4.11. Többszörös regresszióanalízis ... 67
4.11.1. Számításmenet ... 68
4.12. Path-analízis ... 71
4.12.1. A path-együtthatók kiszámítása ... 71
5. Nem-paraméteres próbák (Székely Tamás) ... 73
5.1. Előjelteszt ... 74
5.1.1. Egymintás előjelteszt ... 74
5.1.2. Wilcoxon előjelteszt ... 75
5.1.3. Páros előjelteszt ... 76
5.1.4. Wilcoxon páros előjelteszt ... 77
5.2. Minták lokalizációjára vonatkozó tesztek ... 78
5.2.1. Mann-Whitney teszt ... 78

5.2.2. Kruskal-Wallis teszt 80
5.3. Rangkorreláció 81
5.3.1. Spearman rangkorreláció 81
5.4. Függetlenség és homogenitásvizsgálat 82
5.4.1. Függetlenségvizsgálat c2 próbával 83
5.4.2. Függetlenségvizsgálat G-teszttel 84
5.4.3. Homogenitásvizsgálat c2 próbával 84
5.4.4. Homogenitásvizsgálat G-próbával 85
5.4.5. Fisher-féle exakt teszt 85
5.5. Illeszkedésvizsgálat 86
5.5.1. Illeszkedésvizsgálat c2 próbával 86
5.5.2. Illeszkedésvizsgálat G-próbával 87
5.5.3. Kolmogorov-Szmirnov teszt 87
5.6. Random előfordulási teszt 88
6. Hogyan közöljük adatainkat és prezentáljuk eredményeinket? (Karsai István) 90
6.1. Bevezetés 90
6.2. Tudományos stílus és nyelv 90
6.3. Milyen eredményeinket közöljünk 91
6.4. Milyen fórumon és mely orgánumban közöljünk? 92
6.5. Anyaggyűjtés a tudományos közleményhez. 93
6.6. A tudományos közlemény megírása 94
6.6.1. A tudományos közlemény részei és az első változat megírása 94
6.6.2. A cím és egyéb információk 95
6.6.3. A szerzők és munkahelyük 95
6.6.4. Az összefoglalás vagy kivonat 97
6.6.5. A bevezetés 97
6.6.6. Anyag és módszerek 98
6.6.7. Eredmények 98
6.6.8. Értékelés 99
6.6.9. Köszönetnyilvánítások 99
6.6.10. Irodalomjegyzék és hivatkozások 100
6.6.11. Függelék 101
6.7. A kézirat általános formai követelményei 101
6.7.1. Gépelés 101
6.7.2. Számok és mértékegységek 102
6.7.3. Táblázatok 102
6.7.4. Ábrák, grafikonok és diagramok 103
6.7.5. Rajzok és fényképek 104
6.8. Publikációs gépezet 105
6.8.1. Előzetes lektorálás 105
6.8.2. Tudományos lektorálás 106
6.8.3. A kézirat nyomdai útja 106
6.9. Számítógépes információhálózat 107
6.10. Néhány alapvető felhasználói program alapismérve 107
6.10.1. Szövegszerkesztők 108
6.10.2. Táblázatkezelők 108
6.10.3. Grafikon és ábrarajzolók 109
6.10.4. Statisztikai programcsomagok 110
7. Glosszárium 111
Táblázatok 114

Előszó

A biológus egyetemi és posztgraduális képzés elengedhetetlen követelménye a megfigyelések és kísérletek egyéni tervezése és kivitelezése, az adatok statisztikai analízise és az eredmények biológiai kiértékelése. Ezen ismeretek megszerzéséhez kevés segédeszköz áll a hallgatók részére. A projecttervezésről és eredményközlésről nincs írott információ magyarul, míg a statisztikát alkalmazni vágyó biológusnak készülő hallgató választása korlátos. Egyrészt, választhat a "szakácskönyv" típusú statisztikai kézikönyvek, vagy pedig elméleti anyaggal terhelt matematikai statisztika könyvek közül. A számítógépes programcsomagok elterjedése egyáltalán nem oldotta meg a biológus hallgatók statisztikai gondjait, hiszen a programcsomagok készítői feltételezik, hogy a felhasználó tisztában van a tesztek alkalmazási feltételeivel és logikájával. Hibát követhetünk el a programcsomagok alkalmazásakor, ha egy változó eloszlása nem felel meg bizonyos feltételeknek vagy a mintaelemszám kicsi-mindez megkérdőjelezi vizsgálatunk biológiai értékelhetőségét.

Jegyzetünk célja, hogy a kevés statisztikai és valószínűség-számítási alappal rendelkező egyetemi és posztgraduális biológus hallgatók képesek legyenek biológiai problémák megfogalmazására, önálló projecttervezésre, adatgyűjtésre és az eredmények szakfórumon közlésére. Továbbá, megértsék a leglényegesebb statisztikai teszteket és koncepciókat, és alkalmazni tudják azokat saját kísérletükben. Jegyzetünk alkalmazásközpontú és bevezető jellegű, így a statisztika csupán azon részeit tárgyalja, amelyek a biológiában leggyakrabban használatosak. A jegyzet hatáskörén kívüli problémák megoldására javasoljuk az előszó végén lévő könyveket és dolgozatokat. Habár a példáink jelentős része tükrözi a szerzők botanikai és viselkedésbiológiai orientáltságát, reméljük tanulsággal szolgálnak a biológia más ágai iránt érdeklődő hallgatók számára is. Az összevethetőség érdekében a glosszáriumban közöljük a fontosabb kifejezések angol megfelelőjét is.

A szerzők

Javasolt irodalom

Campbell, R.C. 1990: Statistics for Biologist. Cambridge University Press, Cambrdige.
Daniel, W.W. 1990. Applied nonparametric statistics. PWS-Kent Publishing Company, Boston.
Martin, P. és P. Bateson 1990: Measuring behaviour: an introductory guide. Cambridge University Press, Cambridge.
Mead, R. 1988. The design of experiments. Cambridge University Press, Cambridge.
Moore, D.S. és McCabe, G.P. 1989. Introduction to the practice of statistics. W.H. Freeman, New York.
Potvin, C. és D.A. Roff. 1993. Distribution-free and robust statistical methods: viable alternatives to parametric statistics ? Ecology 74: 1617-1628.
Sokal, R.R. és Rohlf, F.J. 1981. Biometry. W.H. Freeman, New York.
Varga A. 1987. Pszichológiai statisztikai gyakorlat. I-III. Tankönyvkiadó, Budapest.

Köszönetnyilvánítás

A jegyzet Précsényi István professzor KLTE-n tartott Biomatematika című speciálkollégiuma alapján készült. A szerzők köszönik a Viselkedésökológiai Kutatócsoport (KLTE, Állattan) által szervezett statisztikai kurzus résztvevőinek a jegyzet anyagával kapcsolatos észrevételeiket, valamint Lendvai Gábor és Végvári Zsolt aprólékos megjegyzéseit. A kísérletezési és nem-paraméteres tesztek fejezetben felhasználtuk a Sheffieldi Egyetem biostatisztikusainak tananyagát, amiért köszönet illeti Prof. Canning-et, Dr. Dunsmoore-t és Mrs. G. Constable-t.

A jegyzet a Pro Renovanda Cultura Hungariae Alapítvány támogatásával készült. A kézirat megjelenését a KLTE Egyetemi Könyvkiadó Bizottsága tette lehetővé.

1. A szupraindividuális biológiai kutatás tervezése

1.1. A vizsgálati objektum kiválasztása

A "szupraindividuális biológiával" foglalkozó biológusok többsége szubjektív módon kötődik valamely állatcsoporthoz, és elsősorban az ide tartozó élőlények viselkedései iránt mutat érdeklődést. Ebből következik, hogy bizonyos állatcsoportokat, pl. a madarakat, népes gárda vizsgálja, amíg más élőlénycsoportokról (pl. lajhárok) szinte semmit sem tudunk. A tudományos kutatások szubjektív választásainak azonban nemcsak negatív szerepe van, hanem számos pozitív is. A szubjektivizmus miatti erős vonzalom alakul ki a vizsgálati objektum iránt, ami nagyon megnöveli a kutatási munka hatékonyságát, és a kutató a sokszor 16-18 órás megfeszített munkát is képes szívesen végezni.

Nem mindegy azonban, hogy egy bennünket érdeklő élőlénycsoportból hogyan és mely fajt, populációt választjuk ki. Egy sikeres vizsgálathoz a külső feltételek rögzítésén kívül döntő lehet, hogy az adott élőlény megfelel-e egy sor egyéb kívánalomnak. Fontos, hogy a végleges döntés már ne szubjektív módon, hanem alapvető kérdésekre (lásd alább) adott válaszok mérlegelése után történjen. Ebben a fejezetben egy példavizsgálaton keresztül követjük végig a kutatás tervezését. Elképzelt kutatónkat az állatok és a viselkedésbiológia érdeklik leginkább, ezért ahol speciálisabb példák voltak szükségesek, ott ilyen jellegű példák szerepelnek.

1. kérdéscsoport:

- A kiválasztott faj megfelelő reprezentánsa-e egy nagyobb (rendszertani élettani, viselkedési vagy egyéb) kategóriának?
- Vannak-e ismert rokon fajok, amelyek összehasonlítható adatokat szolgáltathatnak vizsgálatunkhoz?
- Létezik-e alapos irodalom az adott fajról a célul kitűzött témában és olyan, egyenlőre még periférikusnak látszó területen (pl. élettan), amelyre esetleg támaszkodnunk kell majd? Ezek a szempontok nagyon fontossá válnak, amikor eredményeinkből majd konklúziókat szeretnénk levonni és más fajokkal végzett vizsgálatokkal összehasonlítani.

2. kérdéscsoport:

- Könnyen megfigyelhető-e a vizsgálandó élőlény természetes környezetében?
- Beszerezhető-e mint laboratóriumi állat?
- Védett vagy ritka fajról van-e szó?
- Sok pénzt vagy időt igényel-e az élőlény megfigyelése vagy tartása?

Ezek a kérdések azért fontosak, mert pénzügyi és időbeli korlátainkat fel kell mérnünk, még a kísérlet előtt és így nem érhet bennünket meglepetés (pl. szakdolgozatnak elvállaltunk egy életművet).

3. kérdéscsoport:

- Könnyű-e az állatfajt tartani, etetni és tenyészteni?
- Toleráns-e az ember jelenlétére?
- Van-e emberre veszélyes betegsége?

A technikai kérdések figyelmen kívül hagyása nagy problémákat okozhat. Ezek a kérdések általában szorosan összefüggnek az előző kérdéscsoporttal.

4. kérdéscsoport:

- Milyen az élőlény életmenet stratégiája?
- Elegendő ideig él-e az élőlény az ismételt kísérletekhez?

- Elég gyors a fejlődése a feltett kérdéseket tekintve?
- Mikor aktív: vannak-e nyugalmi periódusai, éjszakai állat-e?
- Magános vagy társas hajlamú?
- Mozgásai a vizsgált problémákhoz képest nem túl gyorsak vagy lassúak?

Ezek a kérdések már sokszor az elővizsgálatok alatt kerülnek megválaszolásra. Némely kérdésre adott válasz elég egyértelmű, és ezért nem pl. elefántokat használnak viselkedésgenetikai vizsgálatokhoz. Kutatástervezéssel kapcsolatos vizsgálatok azonban rámutattak néhány gyakori hibára: sok kutató vizsgál éjjeli állatot nappal, társasat magánosan és territoriális élőlényt fajtársaival szorosan összezárva.

Ezen kérdések megválaszolásában ne csak tapasztaltabb kollégáink véleményére hagyatkozzunk, hanem mindenféleképpen szánjunk megfelelő időt elővizsgálatokra és irodalmazásra, máskülönben sokat fogunk dolgozni és semmit vagy keveset markolni. Az irodalmazásban nagy segítségünkre lesznek a nyugati jól megírt (sajnos elsősorban csak angol nyelven elérhető) tankönyvek. Ezután kiválasztott csoportról (nemzetség, család szinten) szóló néhány összefoglaló munkát nézzünk át, lehetőleg minél több nyelven. Ezután célszerű az ú.n. Abstract (referáló) folyóiratok átnézése, ahol a tudományos cikkek javának címeit, szerzőit és néhány mondatos összefoglalóját ismertetik. Ezekből rengeteg információt gyűjthetünk össze rövid idő alatt és ha valami részletesebben érdekel bennünket írhatunk a cikkek szerzőinek is, mivel munkahelyük címét is ismertetik.

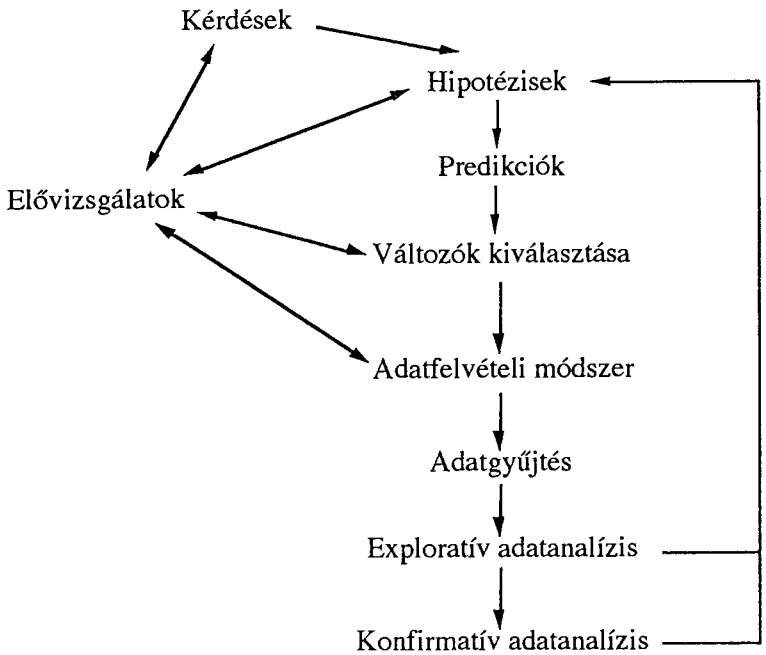
1.1.1. Antropomorfizmus

Az élőlények kutatásának gyakori velejárója az antropomorfizmus. Különösen veszélyes ez a kísérleti élőlény szubjektív megválasztása miatt (lásd fentebb). Gyakran feltételezik például a kutatók (legtöbbször nem tudatosan), hogy az élőlény bizonyos szituációban úgy érez, érzékel és cselekszik, ahogy ők ezt elképzelik. Ez súlyos interpretációs hibákra vezethet.

Tegyük fel, hogy egy élőlény petéinek lerakásához nedves helyet keres. Ezt felfoghatjuk, úgy mint egy nagyon céltudatos cselekedetet, amikor az állat megvizsgálja a környezet nedvességtartalmát és összehasonlítja emlékbeli képeivel, majd ezek alapján dönt, hogy marad vagy elindul egy másik hely felé. Az is elképzelhető, hogy az állat úgy viselkedik, mint egy termosztát, azaz, ha nem érzi jól magát, valamerre random módon továbbmozog, ha megfelelő számára a környezet, lelassul vagy megáll. Mivel ezekről a belső folyamatokról még nagyon keveset tudunk, ezért azt az általános elvet fogadták el, hogy olyan egyszerűen magyarázzunk és értelmezzünk, amennyire az lehetséges.Az antropomorfizmust mindenféleképpen kerülni kell!

1.2. A természettudományos kutatás lépései

Általában a kutatóknak nemcsak az objektum, hanem valamely téma iránt is kiemelt érdeklődést mutatnak . Ezt az érdeklődést kell kutatási stratégiává kiérlelni úgy, hogy a kutatás lépéseit megtervezzük és következetesen véghezviszük. Az ehhez vezető lépések szorosan összefüggnek (1.1. ábra), egymást gerjesztik és feltételezik. Helytelen és üres eredményeket ad az a kutatás, ahol adatokat gyűjtenek (valamihez?) és majd később "feldolgozzák" azokat, de az egész kutatás alatt nincs semmilyen hipotézis vagy elgondolás.



1.1 ábra A természettudományos kutatás lépései.

1.2.1. Az elővizsgálatok és a kérdésfeltevés

Nagyon fontos, hogy világos elképzelésünk legyen a kutatás kezdetén, hogy mi az amit tanulmányozni szeretnénk. Ebben a gondolkodáson kívül sokat segít az irodalmazás és az elővizsgálat. Ha az derül ki, hogy az adott faj szexuális élete végtelenül unalmas, nem érdemes vele a továbbiakban foglalkozni, célszerű más témát keresni. Az elővizsgálatok meggyőzhetnek ennek ellenkezőjéről is. Ekkor egy világos kérdést kell megfogalmaznunk, amivel beszűkítjük további érdeklődésünket: pl. 'Milyen a szexuális viselkedése az XY fajnak?'. További megfigyelések birtokában megkezdhetjük a kérdés sarkítását is: pl. 'A nagyobb hímek többször párzanak-e kisebbeknél?'.

1.2.2. A hipotézisek megalkotása

A tudományos hipotézisek lényegében specifikus kérdések, feltevésükhöz már jelentős előismeret szükséges. Itt a kérdéseinket már sarkított formában (célszerű a formularizáció) kell megfogalmaznunk, hogy alkalmassá váljanak a teszteléshez. Ezek a hipotézisek nem tévesztendők össze a statisztika azonos nevű szakkifejezésével (lásd később). Az itt kifejtett hipotézisek biológiai hipotézisek.

A hipotézisek megalkotásának általános szabályai nincsenek. Elvileg bármilyen hipotézist megfogalmazhatunk, de a biológiailag értelmetlen, vagy tesztelhetetlen hipotézisek felállításával és arra alapozott vizsgálatokkal csak időt és pénzt pazarolunk. Fontos, hogy egymást kizáró hipotézispárokat alkossunk, mert ha csak egy hipotézist alkotunk, azt nagyon nehéz lesz elvetni, ha nem igaz.

Példa a hipotézisalkotásra:

H1 (első hipotézis): Az XY faj szaporodásában a hím testnagyságával arányos a hím szaporodási sikere.

H2 (második hipotézis): Az XY faj hímjeinek szaporodási sikerében a testnagyság nem játszik szerepet.

1.2.3. Predikciók levonása

Minden hipotézisünkből vonjunk le annyi következtetést (predikciót) amennyit csak tudunk. A predikció egy olyan állítás, amelyet a hipotéziseinkből logikai okfejtéssel levonhatunk. Ez a kijelentés olyan formában van megfogalmazva, hogy statisztikailag tesztelhető legyen . A predikciók levonása az egyik legfontosabb, sokszor a legtöbb fejtörést okozó lépés, mivel a biológiai és statisztikai ismeretek összehangolása és a vizsgálat lényeges pontjainak felállítása ebben a lépésben folyik.

Példa predikciók levonására a H1-ből különböző modellek (elméleti vagy más fajok eredményei) alapján:

Az összefüggés függvényét vizsgáló predikciók:

Pred1: A kétszer nagyobb hímek átlagos sikere kétszerese az átlagos hímekének (az összefüggés lineáris).

Pred2: A kétszer nagyobb hímek átlagos sikere négyszerese az átlagos hímekének (az összefüggés nem lineáris: itt négyzetesként van megfogalmazva).

A biológiai háttérre vonatkozó predikciók:

Pred3: A hímek méretével nő a territórium mérete,

Pred4: A hímek testnagyságával nő az utódok felnövési esélye.

1.2.4. Változók kiválasztása

Határozzuk meg milyen változók szükségesek predikcióink teszteléséhez! Néhány kutató mindent mérni akar, végül elveszik a mérésekben és nem tudja, hogy mit is fog tesztelni. Eredményes lesz stratégiánk, ha csak a predikciók tesztelésével közvetlen összefüggésben lévő változókat mérjük. Emellett jegyzeteket készítünk más változókról, amelyek segítenek a következő hipotézisek felállításában. A mért változóinkat minél előbb analizáljuk és teszteljük, hogy hipotéziseinkről képet kaphassunk, és új hipotéziseket állíthassunk fel. Ennél a pontnál már statisztikai ismereteinket is fel kell használnunk. A tesztek szempontjából nem mindegy, hogy a változók folytonosak vagy diszkrétek-e és hogy nominális vagy ordinális stb. skálán mérünk-e (lásd később). Példánkban a Pred1 és Pred2 predikciók teszteléséhez két változó mérése látszik szükségesnek:

Változó1: A hímek testnagysága

Változó2: A hímek szaporodási sikere

1.2.5. Felvételi módszer a választott paraméterek mérésére

A kiválasztott változók mérését többféleképpen végezhetjük. A különböző lehetőségek különböző súlyosságú hibákkal járnak. Ezért nagyon fontos hogy a technikai lehetőségekkel és

saját ügyességünkkel tisztában legyünk. A mérést nagyban befolyásolja eddigi mérési gyakorlatunk és a vizsgálat célja. Ne törekedjünk felesleges és értelmezhetetlen pontosságra, pl. ne mérjünk le kacsa hímeket milligram pontossággal. Valószínűleg a dekagramos érzékenységű mérleg jó lesz erre a célra. Ugyanakkor maradjunk abban a tartományban, ahol változónk tényleg változik, azaz több értéket vesz fel. Az előbbi példánál maradva a kacsahímek kg-os tömegmérése valószínűleg kevés különböző adatot (pl. 1kg, 2kg) tud csak nyújtani. Ilyen adatokkal egy finom skálán mozgó jelenséget nem fogunk tudni vizsgálni. A mérés időszakának megválasztása is fontos lehet. Ha egy szaporodással kapcsolatos jelenség érdekel bennünket, akkor célszerű a hímek súlyát az egész állományon egyszerre felvenni a szaporodási időszak kezdetén, ugyanis a szaporodási időszak végére az addig sikeres (és a kezdeteknél még súlyos) hímek rengeteget veszthetnek súlyukból és akár a valósággal ellentétes eredményt is kaphatunk. Ezt a problémát megkerülhetjük úgy is, hogy más -testnagyságot követő- változót mérünk a súly helyett pl. csőrhosszat vagy más a fajra jellemző kondíciófüggetlen változót pl. a fülhosszat, agancsnagyságot, orrszélességet stb.

A hím szaporodási sikerének mérése még nehezebb feladat, mert gyakran nem ismert, hogy csak a saját hozzájárulás (pl. utódok száma) a lényeges-e, vagy pl. segít rokonainak és ezáltal növeli sikerességét (rokonszelekció). Ezt egyértelműen meg kell vizsgálni. Miben mérjük a sikerességet? Utódszám meghatározásakor nem tudhatjuk pontosan melyik utód melyik hímtől származik, legfeljebb a szigorúan monogám fajok esetén. Mi a vizsgálat számára a fontos: a megtermékenyített petesejtek száma, az élve született utódok száma, vagy az ivarérettséget elért utódok száma? Ezt mind le kell fixálnunk, mert a mérési módszerünket ezekhez kell illesztenünk. Boncolhatjuk pl. a nőstényeket a megtermékenyítés után, számlálhatjuk a hím revírjében élő nőstények utódjainak számát, vagy az egész populáció genetikai felmérését elvégezhetjük pl. vérből vett DNS minták segítségével (DNA fingerprinting).

Példánkban a következőképpen vettük fel az adatokat:

Adat1: A hímek testnagysága: femurhossz
Adat2: A hímek szaporodási sikere: a területhez tartozó nőstények utódainak száma

1.2.6. Mintanagyság

Néhány kutató, ha szisztematikusan elkezdi az adatok gyűjtését, nem tudja abbahagyni. A hatalmas mennyiségű adat feldolgozása további óriási feladatokat teremt, majd a kísérlet végén a "gyűjtögető típusú" kutató ugyanazt a választ kapja, mint jóval mérsékeltebb társa. Azonban példakutatónkat az a hátrány is éri, hogy közben esetleg évek teltek el és rengeteg időt és energiát fordított felesleges munkára, miközben további hipotéziseket alkothatott és tesztelthetett volna. Mérsékeltebb társa már sokkal többet tudott meg a vizsgált témáról és az ő válaszai ugyanolyan kielégítőek voltak. Az igaz, hogy a statisztika próbák erősségét növelhetjük a mintaszám növelésével, de ez csak a mérsékelt mintaszámok alkalmazásánál számottevő. Ne felejtsük el, hogy a statisztikai szignifikancia még nem jelenti azt, hogy a vizsgált jelenség biológiailag is értelmezhető, vagy jelentős.

Mennyi adatot gyűjtsünk tehát? Annyit, amennyi predikciónk teszteléséhez elegendő. Hogy ez mennyi arra nemcsak rutinunk vezethet rá bennünket, hanem elővizsgálataink is. Az elővizsgálataink adataiból megbecsülhetjük az optimális mintaszámot a következő egyszerű képlettel:

$$N = \frac{s^2 \cdot z^2_{\alpha_{1/2}}}{D^2}$$

Ahol:

- s^2 az elővizsgálat adatai alapján becsült variancia

- z a normális változó kritikus értéke az $\alpha_{1/2}$ szignifikancia szinten; z = 1.96, ha a szignifikancia szintet p = 0.05-nek vesszük (lásd statisztikai próbák).

-D jelzi azt a különbséget, amelyet megengedhetőnek vélünk a populáció valódi középértéke és mintáink középértéke között.

1.1. példa. Egy bizonyos testnagysági osztályba tarttozó hímek utódszámára az elővizsgálat a következő adatokat szolgáltatta: 9, 12, 7, 15, 13, 4 utód.

Legfeljebb 2 utódnyi eltérést engedélyezünk a populáció valós átlagától

p = 0.05 szignifikancia szintet választottunk.

1. Kiszámítjuk a mintánk szórását: = 4.1
2. Kiszámítjuk az optimális mintaszámot:

$$N = \frac{4.1^2 \cdot 1.96^2}{2^2} = 16.1$$

3. A kapott értéket felfelé kerekítjük és ennyi adatot próbálunk felvenni,
4. A mintaszám növekedésével az N értékét többször kiszámoljuk és vizsgáljuk, hogy a becsült érték jelentősen ingadozik-e (a szórás változása miatt). Ekkor mintavételünk nem eléggé homogén vagy egyéb inhomogenitásra bukkantunk, ami lehet a populáció sajátja is, ekkor gondoljuk át a mintavételt még egyszer, és ha szükséges válasszunk új populációt, változót vagy mérési módszert. Ezek helyett növelhetjük persze a mintaszámot is, de ez nem mindíg a leghelyesebb és legegyszerűbb megoldás.

1.2.7. Csoporthatás a minták között

Felmerülhet problémaként, hogy nem tudjuk eldönteni méréseink egységét. Példavizsgálatunkban arra is kiváncsiak lehetünk, hogy az adott hím ivadékainak milyen a súlya (pl. ebből következtetünk az utódok túlélőképességre). Mit mérjünk? Hibát követünk el, ha az egyedi méréseknek az utódegyedeket tekintjük, mert egy alomban az egyedek nem függetlenek (lásd kísérlettervezés): genetikai rokonság, egymás elől eszik el a táplálékot stb. Itt akkor járunk el helyesen, ha az almokat vesszük egységnek pl. átlagolunk az almokra.

A társas élőlényeknél a szociális viszonyok döntően befolyásolják a viselkedést, ezért nem mindegy, hogy hány fajtárs van a közelben. A csirkék táplálékfelvétele függhet attól , hogy mennyi csirke eszik a kiválasztott egyed közelében (szociális facilitáció).

1.2.8. A megfigyelő hatása

Vizsgálatainkban feltételezzük, hogy a megfigyelő nem zavarja a megfigyelt jelenséget, azonban ez nem igaz. A rendszer mindíg másképpen viselkedik, ha a megfigyelő nincs jelen, ezért a megfigyelő általi hibával számolni kell. Sokszor a megfigyelő által okozott eltérés csökkenthető jelentősen technikai megoldásokkal: félig áteresztő tükrök, videokamerák, rejtett megfigyelés, lessátor stb alkalmazásával.

Nagyobb probléma a megfigyelő elvárásainak hatása a vizsgálatra. Leghíresebb példa arra, hogy az eredmény csak a megfigyelő hatásának volt tulajdonítható Okos Hans, a számolni tudó ló esete. Ez a ló "képes volt" egyszerű matematikai műveletek végzésére és az eredményt lábával lekopogta. Valójában arra volt képes, hogy bármely megfigyelő reakcióit kövesse és ott hagyja abba a "számolást", ahol a megfigyelő elégedett volt az eredménnyel.

A legtöbb vizsgálatban a megfigyelőnek tulajdonított hatás nem nyilvánvaló és jelentős, de az eredményeket könnyen eltolhatja olyan irányba, ami nem igaz, de a megfigyelő által

valamiért "kedves". Példavizsgálatunknál maradva a territóriummal rendelkező nagyobb hímeket többet figyeljük, mert ezek megfigyelése könnyű, utódainak számát emiatt jobban megbecsüljük, vagy éppen túlbecsüljük (a territóriumhoz tartozó nőstények utódszámát mérjük). A kisebb hímeket, amelyek esetleg nem is rendelkeznek territóriummal, hanem bújkálnak a sűrűben vagy a nagyok territóriumának perifériáján élnek, kevesebbet figyeljük. Ezek utódait nehezebben állapítjuk meg, vagy alábecsüljük. Végülis lehet, hogy mindkét hím stratégia egyformán sikeres, de mi feltételeztük, hogy a nagyobb hímek utódszáma nagyobb, és megfigyeléseinket a nagyobb hímek területeire koncentráltuk. Alkalmi megfigyeléseink során a kis hímek nem mutattak olyan feltűnő udvarlási stb. pózokat, és ritkán párzottak szem előtt. Ezzel "igazoltnak" vettük, hogy ezek sikere kisebb. Ez a megállapítás viszont, mint láttuk, nem volt helyes.

1.2.9. Adatanalízis és a kutatás öngerjesztő tulajdonsága

Ha összegyűjtöttük a megfelelő mintaszámnak megfelelő adatot és még egyszer végiggondoltuk azokat a pontokat, ahol valamilyen hibát (mintavételi, mérési, prekoncepciós hibák) elkövethettünk, akkor nekifoghatunk adataink analízisének. Célszerű exploratív (felderítő) adatanalízisekkel kezdeni, ami rámutathat néhány nyilvánvaló összefüggésre és ötleteket adhat a tesztelésekhez vagy a további vizsgálatokhoz. Az exploratív adatanalízis egyszerű számításokat (átlagok, mediánok, szórások) és ábrázolásokat (eloszlások, hisztogrammok, plotdiagrammok) foglalhat magába. Miután megismerkedtünk adataink struktúrájával, rátérhetünk a konfirmációs (megerősítő) vagy döntéshozó adatanalízisekre, azaz predikcióink tesztelésére (lásd később).

Ha jó (értelmes) volt a kérdésünk, jól terveztük és végeztük kutatásainkat, akkor nemcsak kérdéseinkre kapunk választ, hanem ezek megoldásával újabb kérdések sokasága merül fel, amelyek további munkahipotézisek kiindulópontjai lehetnek.

1.2.10. Mit jelentenek eredményeink?

Nagyon fontos, hogy ne emeljük tényekké eredményeinket! Sajnos ez igen gyakran előforduló hiba, és ez kutatásokat gyakran megakasztja vagy téves irányba vezeti. Ez a forrása a tekintélyelvű kutatásoknak is, pl. ha Prof. Ezésez Géza ezt kapta, akkor ez így van. Az első ábráról látszik, hogy mennyire téves ez a káros nézet. Adataink nem boríthatnak fel egy tudományos hipotézisrendszert. Ez nemcsak a statisztika szignifikancia jelentése miatt van így, hanem azért is, mert adataink csupán "lágy" bizonyítékok. Azaz támogatnak vagy nem támogatnak egy hipotézist. A nem-támogatás oka lehet az is, hogy mi vontuk le hibásan a predikciónkat (vagy le se vontuk), tehát nem a hipotézis a "hibás". Hipotézist csak másik (alternatív) hipotézis dönthet meg. Ez a megdöntés pedig számos vizsgálaton és elméleti alapon kell hogy álljon. Példavizsgálatunkban azt kaptuk, hogy a nagyobb hímek szaporodási sikere nagyobb. Ha pl. fent ismertetett mintavételi hiba miatt eredményül azt kaptuk volna, hogy ez az összefüggés nem áll fenn, akkor az első hipotézisünket (H1) ez a vizsgálat nem támogatta volna. Lehet hogy további kutatásaink többsége majd a H1 hipotézist fogja támogatni és kiderül, hogy hol hibáztunk. Ha egy vizsgálat a H1 hipotézist nem támogatta az nem jelenti azt sem, hogy akkor a H2 "igaz". Példánkban problémánk lenne azzal, hogy ebben az esetben mit jelentenek eredményeink, ugyanis a második hipotézisünkből nem vontunk le predikciókat (lásd predikciók levonása) annyira biztosak voltunk az első igaz voltában. Így előfordulhat, hogy ennek a vizsgálatnak az eredményét nem is tudjuk felhasználni a H2 hipotézis tesztelésére. Most tehát hibáztunk, ezért az eddigi eredményeket és hipotéziseket a mintavételi problémákkal együtt ismét végig kell gondolni és ha szükséges újratervezni és újra megcsinálni a vizsgálatot.

1.2.11. A vizsgálat ismételhetősége

Előfordulhat, hogy elvégeztünk egy vizsgálatsorozatot és az egyik predikció által jósolt eredmény tesztje szignifikáns volt. Ezt azonban még egyszer nem vagyunk képesek produkálni, azaz az eredményt nem tudjuk ismét prezentálni. Ennek több oka is lehet:

- Statisztikai ok: az első fajú hibát kaptuk meg, azaz szignifikáns különbséget kaptunk, pedig a valóságban nincs. A $p = 0.05$ azt jelenti, hogy a tesztünk során 5% az esélye annak, hogy téveset állítunk, azaz 100 megismételt kísérlet esetén 5-ször hibás konzekvenciát vonunk le.

- Elfedés: Valamilyen nem mért tényező hatása elfedte az általunk mérni kívánt hatást. Pl. a mintavizsgálatunkban bár lehet, hogy a nagyobb hímek sikere nagyobb, de a mérés előtt a hímek nagy része betegségtől elpusztult, így a méréskor 1-1 hímre irreálisan sok nőstény jutott. Emiatt azt kaptuk, hogy a hímek sikeressége között nincs szignifikáns különbség.

- Mást mérünk, mint hisszük: Hipotézisünk szerint az egyik tényező függ a másiktól: így az egyik tényező változásának a függvényében a másik változót jósolhatjuk. Gond akkor lesz, ha olyan adatokat kapunk, ami ezzel az elképzelésünkkel egyszer csak nem találkozik. Példavizsgálatunkban azt tételeztük fel, hogy a testnagyságtól függ a sikeresség. Mi történik akkor, ha ez a két változó nem függ össze közvetlenül, hanem valamilyen közös harmadik tényezőtől függ és ebben beáll valamilyen változás? Ekkor könnyen tévedhetünk. Lehet, hogy a jelenség a tesztoszteronszintre vezethető vissza. A sikeresség attól függ, hogy milyen aggresszív az állat és alapos vizsgálatok szerint ez szoros és okozati összefüggésben van a tesztoszteronszinttel. A testnagyság esetleg annyiban játszik szerepet, amennyiben nagyobb állat nagyobb ütőképességgel bírhat, így esetleges magas tesztoszteronszintjéből következő aggresszivitását jobban ki tudja fejezni. Lehetséges az is, hogy a tesztoszteron csökkenti az állat növekedését az egyedfejlődés során, és a magas hormonszintű állatok kicsik vagy közepes nagyságúak lesznek. Persze ez nem zárja ki azt sem, hogy vannak kis hormontiterű kis és közepes testű egyedek is.

Fontos tehát, hogy annyi háttértényezőt írjunk le és vizsgáljunk meg, ami lehetővé teszi a vizsgálat megismétlését. Ne higgyünk az olyan vizsgálatoknak, amiket senki sem volt képes megismételni. Ez fokozottan vonatkozik saját vizsgálatainkra. Ha saját kísérleteinket mi sem vagyunk képesek megismételni, akkor a fenti problémák valamelyikébe bonyolódtunk bele. Ekkor gondoljuk át a teljes vizsgálati folyamatot a hipotézisek megalkotásától és ha szükséges kezdjünk a vizsgálatot újra. Jobb egy hosszan tartó, de jó vizsgálat egy hibákkal terhelt bizonytalannál.

Néha a vizsgálatokat nem identikusan ismétlik, hanem az ú.n. konsruktív replikációt alkalmazzák. Viselkedésökológiai kutatások során pl. az identikus replikáció kivitelezése szinte lehetetlen, mertha azonos populáción dolgozunk is, annak génkészlete már jelentős változáson mehetett keresztül néhány év alatt. Példavizsgálatunkban a hímek az említett betegséget néhány év alatt "kiheverhetik", azaz a nemi arány ismét közelíthet a "szokásos" értékhez és a hímek összecsapásainak számát ez fokozhatja.

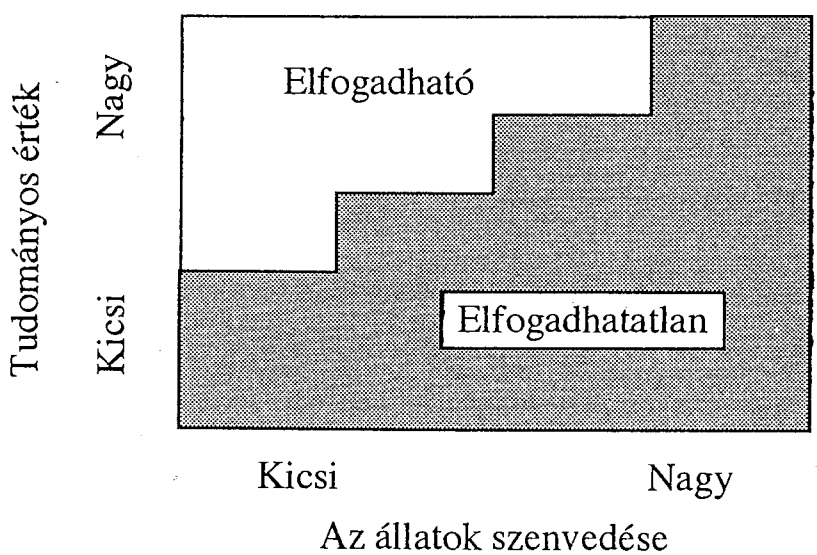
A konstruktív replikáció olyan vizsgálati felállás, ami konvergens eredményt adhat az adott vizsgálattal. A két vizsgálat nyugodtan több dologban is eltérhet, beleértve a vizsgált fajt, a módszereket és a hipotéziseket is, de pl. egy fontos predikcióban közös pontot mutatnak. Példavizsgálatunkban konstruktív replikációt végzett egy kutató vizsgálatainkra, hogy megállapítsa, vajon a nagyobb hímek sikeresebbek-e mint a kisebbek. Ő az XY faj helyett a rokon XZ fajal dolgozott, amely életmódja nagyon hasonló az példavizsgálatunk fajához. Terepvizsgálatok helyett azonban laborvizsgálatokat végzett és csak arra volt kiváncsi, hogy a nagyobb hím nagyobb ovulációs stimulust okoz-e a nőstényeknek, mint a kisebb hímek. Hipotézisei bár némileg másként vannak megfogalmazva (az eltérő szakzsargon miatt) ugyanazok lehetnek , mint példavizsgálatunkban. Azonban predikciói a más elméleti alap és metodológia miatt már eltérnek. Ha a két vizsgálat, amelyeknek meghatározott közös pontjai vannak, párhuzamosan ugyanazt a hipotézist támogatja, akkor kisebb a valószínűsége, hogy

tévedtünk mind a ketten. Csak a statisztikai elsőfajú hibából eredő közös tévedésünk a 0.05 helyett 0.0025 lesz.

1.3. A biológiai kutatások etikája

A biológiai kutatásokat néhány évtizede még alig szabályozták. Napjainkra gyökeres változás történt. A molekuláris biológiában alkotott erős ellenőrzés azt a célt szolgálja, hogy a genetikailag módosított élőlények ne kerüljenek ki a természetbe, ahol terjedésük és hatásaik ellenőrizhetetlenné válnak. Ugyancsak erős kontroll folyik abban az irányban, hogy a kutatások áttekinthetők legyenek és senki se állítson elő olyan organizmusokat, amelyek valamilyen szempontból nem kívánatosak. Ezek a szabályzók elsősorban az ember érdekeit védik. Ma már azonban a vizsgálati objektumok védelmére is egyértelmű szabályokat alkottak és ezek betartását ellenőrzik.

Az élőlényekkel történő vizsgálatok során az állatok szenvedését mérsékelni kell pl. kevesebb feláldozott állat, szövettenyésztés használata egész élőlény helyett, védett vagy veszélyeztetett fajok vizsgálatainak mérséklése stb. Természetesen a kutatás minősége és fontossága befolyásolja a megengedett állati áldozatokat (3. ábra). Egy nagy fontosságú gyógyszer kifejlesztése rengeteg állat életébe kerülhet, amíg egy viselkedésökológiai vizsgálatnál, ahol a hímek sikerességét akarjuk megállapítani általában nem célszerű a nőstények felboncolása. Az ábráról leolvashatjuk, hogy nagyon sok áldozattal járó kutatás, mégha az igen jó minőségű is, etikailag kifogásolt. Valószínűleg nemcsak lelkiismeretünket terheljük meg egy ilyen vizsgálattal, de nem is fogják az erről szóló közleményünket leközölni. Azt is láthatjuk, hogy az élőlények szenvedésével egyáltalán nem járó, de értéktelen kutatással foglalkozók is etikai vétséget követnek el. Ennek oka az, hogy más kutatásoknál felhasználható értékes forrásokat pazarolnak el. Az etikai problémákra a következő mindenképpen követendő példát hozhatjuk fel: Végezzünk magas kvalitású és fontos kutatásokat az élőlények legkisebb szenvedése mellett! Tájékozódjunk a vizsgálatok előtt a kiválasztott objektum védettségét és sérülékenységét illetően. Ha lehet gerinctelenekkel kísérletezzünk, a magasabbrendűeknél a megfigyelésekre tegyük a hangsúlyt.



1.3 ábra A kutatás etikája az állatok felhasználásával kapcsolatban

2. A kísérlettervezés

A kísérletezés alapvető eleme a természettudományos megismerésnek. A kísérletezés fontosságát nehéz túlhangsúlyozni a biológiában, orvostudományban és az agrártudományokban. Habár megfigyeléssel is gyűjthetünk adatot, pl. a napfény növények növekedésére gyakorolt hatásáról, a megfigyeléssel gyűjtött adatok alternatív hipotézisekkel is értelmezhetők. Például, a napfényben és az árnyékban fejlődő növények méretkülönbségét okozhatja a növények eltérő fényérzékenysége, a talajösszetétel vagy a nedvességtartalom különbsége is. A növekedést ténylegesen befolyásoló tényezők hatását kísérlettel kell demonstrálni. Az alábbiakban először a kísérlet alapelemeiről (2.1.), és a kísérletezés fő szabályairól lesz szó (2.2.), majd a kísérletezés korlátaira (2.3.), és a kísérleti elrendezésekre térünk ki (2.4.). Az adatok jellemzését és a hipotézisek tesztelését a 3. fejezetben tárgyaljuk. A kísérlettervezésről és a kísérletezés szabályairól kiváló ismertetés található Mead (1988) és Moore és McCabe (1989) kézikönyveiben.

2.1. A kísérlet elemei

Kísérletnek az alanyok (vagy változók) szisztematikus manipulálását nevezzük. A kísérleteket végezve arra várunk választ, hogy a kezelés hatásaként kapott eredmény milyen valószínűséggel tulajdonítható a kezelésnek és a véletlennek (a véletlen itt a figyelembe nem vett összes tényezőt jelenti). A statisztikusok és a biológusok eltérő kísérletfogalmat használnak, a statisztikusok számára egy pénzfeldobás is kísérletnek számít, amit kevés biológus tekintene "valódi" kísérletnek. A kísérletezés alapelveit az 1930-as évek mezőgazdasági céljaira dolgozták ki, amiben kulcsszerepe volt R.A. Fisher-nek.

A kísérlet részei a kísérleti alanyon (egységen) kívül a manipulálható független változó (pl. kezelés és kontroll) és a mérhető függővváltozó (pl. reakcióidő, termésmennyiség, növekedés mértéke). A független változó, amit kísérleti faktornak is neveznek, lehet kvalitatív és kvantitatív. Kvalitatív kezelés például egy tényező teljes megvonása, míg a kvantitatív kezelésben a független változó ismert mennyiségét vonjuk el vagy biztosítjuk. A függő változóval szemben követelmény, hogy tartománya átfogja a kezelés hatását, és azon belül érzékenyen reagáljon a kezelésre. A kísérleteket a manipulált független változó száma szerint egyfaktorúnak vagy többfaktorúnak nevezik. Az utóbbi típusnál több változó együttes hatását vizsgáljuk. A változók harmadik csoportját a járulékos változók alkotják (pl. kísérleti körülmények és alanyok tulajdonságai). Habár a járulékos változók befolyásolják a függő változót, a kísérletnek nem célja a járulékos változók hatásának vizsgálata.

A kísérleteket két típusba sorolják: egyszerű és összehasonlító. Egyszerű kísérletben az összes alany egyetlen kezelést kap, és a függő változót csak a kezelés után vizsgáljuk:

kezelés - megfigyelés

vagy az összes alanyt a kezelés előtt és után megvizsgáljuk:

megfigyelés 1 - kezelés - megfigyelés 2

Az egyszerű kísérlet fogyatékossága, hogy amennyiben a kezelés alatt az alany valamely tulajdonsága megváltozik, pl. az alany viselkedése életkorfüggő, nem tudjuk eldönteni, hogy a változás kezelésünknek tulajdonítható-e, az alanyban bekövetkezett változásnak, vagy más járulékos változó hatásának. Az összehasonlító kísérletben a kezeléssel párhuzamosan felállítunk egy kontrollcsoportot, amely csupán egyetlen lényeges szempontból különbözhet a kezelt csoporttól - ez pedig a kezelés hiánya. A kontrollcsoport segítségével a

vizsgálati alanyok kísérlet alatti változását pl. maturációját és tanulását, és a környezet járulékos hatásait szűrhetjük ki.

2.1. példa. A gyomorfekély korábban használt gyógymódja volt, hogy a beteg gyomrán hideg folyadékot áramoltattak a beteg által lenyelt gumicsövön keresztül. A terápia egy kontroll nélküli egyszerű kísérleten alapult, amelyben a betegek egy csoportja a hideg folyadék hatására meggyógyult. Később megismételték a kísérletet összehasonlító kísérlet formájában. Ekkor a hideg folyadékkal kezelt gyomorfekélyes csoporton kívül a betegek egy kontrollcsoportjának gyomrán szobahőmérsékletű folyadékot áramoltattak keresztül. A megismételt összehasonlító kísérletben nem volt különbség a kezelt és kontrollcsoport gyógyulási esélye között, így az egyszerű kísérletben bekövetkezett gyógyulás nem a hideg folyadéknak, hanem az eljárással járó pszichológiai és fiziológiai hatásnak tulajdonítható (placebo hatás).

2.2. A kísérletezés szabályai

A kísérletezés fő szabályai a kontrollálás, randomizálás és az ismétlés.

2.2.1. Változók kontrollálása

Ideális esetben a független változó manipulálását a függő változó valamilyen függvénykapcsolat szerinti módosulása követi. A vizsgálati alanyok azonban nem azonosak, így nem egyformán reagálnak a kezelésre. Például, rövid megfigyeléssel meggyőződhetünk arról, hogy az egy alomból származó kísérleti egerek viselkedése különböző, vagy azonos növénytől származó magokat lemérve láthatjuk, hogy a magok különböző tömegűek. A kísérlet mikrokörülményei is eltérők lehetnek. A különbség származhat az eszközök, kísérleti helységek és vizsgálati idők különbségéből. Amennyiben az alanyok heterogenitásából és a kísérleti körülmények eltérőségéből származó "zaj" nagy, hatásuk elfedheti a kezelés hatását. A kísérletezés első szabálya, hogy a függő változón kívüli összes változót kontrollálni kell. Hogyan tudjuk a kontrollálást megvalósitani ?

A kontrollálás két elterjedt módja a kísérleti objektumok előre eltervezett kezelése (blokktípusú kísérleti elrendezés) vagy a kísérlet utáni statisztikai kontroll. Blokkok létrehozásával az alanyok és a környezet heterogenitását az alanyok és/vagy a kísérleti körülmények homogén csoportokba (blokkokba) sorolásával csökkentjük (ld. 2.4.2. és 2.4.3). Az alternatív lehetőség a kísérlet eredményét várhatóan befolyásoló járulékos változók kísérlet alatti mérése és a járulékos változók hatásának statisztikai kiszűrése (ld kovariancia analízis: 4.10., regresszióanalízis: 4.8.).

2.2.2. Randomizálás

A randomizálás alkalmazása a kísérletezés második szabálya. Randomizálást kell használnunk az alanyok csoportba sorolásához és a kezelési sorrendek kialakitásához. A random besorolás nem egyenlő a tetszőleges besorolással, ugyanis a randomtáblázat vagy randomszám generátor nélküli randomizálások ritkán bizonyulnak tényleg randomnak.

R. A. Fisher ismerte fel először, hogy kísérletek kivitelezésekor gyakori hiba az alanyok nem random kiválasztása. Hibát követünk el, ha bizonyos kezelést azokon az egereken végezzük el, amelyeket leghamarabb be tudunk fogni vagy ha egy kezelést a kísérleti parcella azon részére koncentráljuk, amelyet legkönnyebben elérhetünk. Nyilvánvaló, ezen esetekben a

kezelt és kontroll csoportról gyűjtött adataink nem csupán a kezelés miatt különbözhetnek, hanem a szisztematikusan különböző egyedi hatások is okozhatják a tapasztalt eltérést, pl. a laboratóriumi egerek agilitása és a parcellák különböző talajminősége. A szubjektív hibákat a randomizálás alkalmazásával kerülhetjük el, azaz random módon kiválasztott alanyokat (pl. egereket, parcellákat) részesítünk kezelésben és tartunk kontrollnak. A randomizálás további jelentősége, hogy a járulékos változók hatását kiküszöböli (pl. környezeti hatásokat), továbbá megakadályozza az egymástól függő megfigyelések kialakulását.

Hogyan randomizáljunk? A legkézenfekvőbb randomizálási eszköz egy hibátlan fémpénz. Fej vagy írás alapon eldönthetjük, melyik egyednek adunk kezelést és melyiket tartjuk meg kontrollnak. Használhatjuk a számítógépek randomszám generátorát is, habár a számítógéppel előállított random számok egy idő után ismétlődnek. Továbbá, használhatjuk a random számok táblázatát is (1. táblázat). A randomtáblázat két tulajdonsággal rendelkezik: a tíz számjegy egyforma valószínűséggel fordul elő a táblázatban, és a számjegyek sorrendje független egymástól. Habár a táblázatok csoportosítják az értékeket, a csoportok csak az áttekinthetőséget növelik. A randomizációt minden alkalommal a táblázat különböző pontjaiban célszerű kezdeni.

2.2. példa. Egy kísérlethez 20 patkányt kell két csoportba osztanunk. Először mindegyik patkányhoz hozzárendelünk egy kétjegyű számot (01,02,03,....20). Ezután a randomtáblázat (1. táblázat) bármely pontján elkezdjük olvasni a számokat - haladhatunk függőlegesen és visszintesen is. Tételezzük fel, hogy a táblázat 30. sorában kezdünk, ahol az alábbi számsor áll

69051 64817 87174 09517 84534 06489 87201 97245.

Mivel a patkányokat kétjegyű számokkal láttuk el, a fenti sort kettesével felosztjuk.

69 05 16 48 17 87 17 40 95 17 84 53 40 64 89 87 20 19 72 45

Minden kettős számot egyedek azonosítójaként kezelünk. A kezelendő csoportba a random számsorban előforduló első 10 azonosított egyed kerül: 05,16,17,20,19... egyedek. Mivel 17 - et az első előfordulás után már kiválasztottuk, ismételt előforduláskor nem vesszük figyelembe. A 30 - ik sor után vesszük a következő sort, és addig haladunk, amíg 10 kezelendő egyed azonosítójára nem találunk. A fennmaradó 10 egyed alkotja a kontrollcsoportot.

2.2.3. Ismétlés

A kísérletezés harmadik szabálya, hogy minden kezelést többször kell megismételni, hogy a járulékos változók hatását csökkentsük és a kezelés hatását felismerhessük. Az ismétlés hatása kettős: csökkenti az átlag szórását (ld. 3.2.3.5) és növeli a statisztikai próbák szabadsági fokát. Óvakodni kell a pszeudoreplikációtól, amikor egyetlen alanyon többször végezzük el ugyanazt a kezelést - ebben az esetben a kezelésünk nem választható el az egyed specifikus válaszától - így mintaelemszámunk nem a kezelés ismétlésének számával, hanem az alanyok számával egyezik meg.

2.3. A kísérletezés korlátai

Habár a kísérletezés számos kedvező tulajdonsággal rendelkezik, a kísérletek alkalmazhatóságát több tényező csökkenti. Gyakran a helyszín, a probléma vagy az alany nem alkalmas kísérlet végzésére, például az utóbbi években etikai kódexek szigorítják meg az állatok

kísérleti felhasználását (ld. 1.3.). A másik korlátozó hiba szubjektív: a kísérletet végző hajlamos a kezelés várt hatását észrevenni, míg a várakozásnak ellentmondó eredmények nem kapnak elegendő figyelmet. Az orvosi gyakorlatban ezt a veszélyforrást a kettősvak kísérlettel küszöbölik ki; nemcsak a beteg, hanem a kísérletet végrehajtó sem tudja a kezelést a placebó - tól megkülönböztetni. A realizmus hiánya szintén fenyegeti a kísérletezőt, hiszen minden kísérlet csupán abban a tartományban értelmezhető, ahol végezték. A meggyőző bizonyítékok gyűjtésére célszerű egy kísérletet többféle elrendezésben megismételni.

2.4. Kísérleti elrendezések

A kísérleti elrendezés a kísérlet megvalósításának terve. A kísérleti elrendezés célja, hogy csökkentse a kísérleti alanyok közti változatosságot és megakadályozza, hogy a kezelés hatásán kívül más változó is befolyásolja a függő változót. A kísérleti elrendezés lehetővé teheti több kezelés együttes vizsgálatát. A statisztika korai szakaszában számos elrendezést dolgoztak ki, amelyek közül a leggyakoribbakat említjük meg. A legfontosabb alapelv, hogy a kísérletet a lehető legegyszerűbb elrendezéssel valósítsuk meg. Egyfaktorú kísérleti elrendezés a tökéletesen random elrendezés (2.4.1.), a random blokk elrendezés (2.4.2.), és a latin négyzet (2.4.3.). A többfaktorú kísérleteket faktoriális elrendezéseknek nevezik (2.4.4.).

2.4.1. Tökéletesen random elrendezés

A legegyszerűbb kísérleti elrendezés, amelyben a kezeléseket random módon rendeljük az alanyokhoz. Például, egyetlen műtrágyatípus hatását vizsgáljuk, és nyolc parcella áll rendelkezésünkre. Az egyes parcellák (1,2...8) egyforma eséllyel kapják a kezelést (műtrágya), vagy szolgálnak kontrollként. A parcellák random táblázat szerinti besorolásával az alábbi csoportokat kapjuk:

kezelt parcellák: 1,2,6,7
kontroll parcellák: 3,4,5,8

A tökéletesen random elrendezés előnyös tulajdonsága, hogy flexibilis, azaz bármilyen számú kezelést és ismétlést használhatunk, az egyes kezeléseken belüli ismétléseknek nem szükséges azonos számúnak lennie. Az elrendezés hátránya, hogy amennyiben a kísérleti alanyok között nagy egyedi különbségek vannak, nem tudjuk felderíteni a kezelés hatását.

A tökéletesen random elrendezés használata közel homogén kísérleti alanyoknál javasolt pl. egyes laboratóriumi egértörzseknél, továbbá a kutatások felderítő szakaszában, amikor a kísérletező az összes alanyt szeretné felhasználni a kísérlethez. Ezen elrendezés előnyös akkor is, ha várható, hogy az alanyok egy része nem reagál a kezelésre, vagy elpusztul a kísérlet alatt. Ez utóbbi esetben az adatveszteség a tökéletesen random elrendezésben lesz a legkisebb.

2.4.2. Blokk elrendezés

A kísérleti alanyok (pl. egyedek, parcellák) változatosságából származó hibát az alanyok csoportokba sorolásával csökkenthetjük. A blokk elrendezés lényege, hogy a kísérletet megelőzően az alanyokat homogén csoportokba soroljuk pl. hasonló korú és nemű alanyokból egy-egy csoportot képezünk, és az egyes csoportokon belül végezzük a kezeléseket. A csoporton belül a kezeléseket random módon kiválasztott alanyokon végezzük, és minden csoportban új randomizálást végzünk. Ha a kezelések száma megegyezik az egyes csoportokon belüli alanyok számával, tökéletes blokk elredezést végzünk, míg ha a kezelések száma meghaladja a blokkon belüli alanyok számát, akkor tökéletlen blokk elrendezésről beszélünk.

Tökéletes blokk elrendezés például, ha négy területen (blokk 1, 2,3 és 4) egytípusú kezelés három szintjének (A,B,C) hatását vizsgáljuk (D = kontroll), ahol egy blokkon belül négy alany van:

Blokk 1	Blokk 2	Blokk 3	Blokk 4
B	D	D	D
C	B	B	B
D	C	A	C
A	A	C	A

Ha egyetlen blokkon belül három alanyunk van, a kezelés négy szintjét nem tudjuk minden blokkban megismételni, így tökéletlen blokk elrendezést alkalmazunk:

Blokk 1	Blokk 2	Blokk 3	Blokk 4
A	D	C	D
B	A	D	C
C	B	A	B

A blokk elredezések előnye, hogy bármilyen számú kezelést és ismétlést végezhetünk. Továbbá, a kísérletező nagyobb eséllyel fedezheti fel a kezelés hatását, mint a tökéletesen random elrendezésben, mivel a kezelések blokkon belüli hatását nem fedi el az egyedek blokkok közti különbsége. A blokkelrendezés feltételezi, hogy nincs interakció a járulékos változók és a kezelések között.

2.4. példa. Az inzulin hatását vizsgálták a vércukorszintre. Nyolc alomból származó 24 nyúlon tesztelték három inzulinkoncentráció hatását. Ebben a kísérletben ugyanabból az alomból származó nyulak képeztek egy-egy blokkot. A kísérletezők minden alomban egy-egy random kiválasztású nyúlnak adtak az egyes inzulinkoncentrációból. A vizsgált változó a vércukorszint volt. Az injektálást követően a vércukorszint százalékos csökkenése az alábbi volt:

Alom	Dózisok		
	2.29	3.93	5.57
1	17	64	62
2	21	48	72
3	49	34	61
4	54	63	91
5	33	41	56
6	37	64	62
7	40	34	57
8	16	64	72

Ha nem csoportosítottuk volna az alanyokat blokkokba, nehezebben tudnánk felfedezni a dózisok hatását, hasonlítsuk össze például a 4. és 5. alomból származó nyulak reagálását az inzulindózisokra ! A 4. alomból származó alany vércukorszintcsökkenése a legalacsonyabb inzulinkoncentrációnál közel azonos volt az 5. alomból származó alany legnagyobb dózisnál tapasztalt vércukorcsökkenésével - habár mindkét alomban az inzulinkoncentráció emelkedésével egyre jobban csökkent a vércukorszint.

A kísérletezők 4 dózis hatását is vizsgálhatták volna tökéletlen blokk elrendezésben, ekkor a kísérlet rövidebb ideig tartott volna, és egyszerűbben kivitelezhető lett volna, mintha minden alomból 4 egyedet választottak volna ki a kísérlet céljaira. A dózisok hatását azonban a tökéletes blokk elrendezésben fedezhették fel valószínűbben, hiszen az azonos alomból

származó nyulak egyedi különbségei várhatóan kicsik. Tökéletlen blokk elrendezésben az almok eltérő tulajdonságai könnyebben elfedhették volna a dózisok okozta hatást.

2.4.3. Latin négyzet

Míg a blokk elrendezés célja egyetlen járulékos változó hatásának kiszűrése, a latin négyzet alkalmazásával két járulékos tényező kizárását végezzük. A latin négyzet elnevezés a 2*2, 3*3 elrendezésre és a kezelések latin betűs jelölésére utal. A latin négyzet előállításához a két tényező páronkénti szintjeihez rendeljük hozzá a kezeléseket úgy, hogy minden kezelés előforduljon a két tényező minden egyes szintjében. A kísérleti alanyokat random módon választjuk ki. A latin négyzet kötött a két tényező kategóriáinak azonos számához. Az alábbi elrendezés mutatja, hogy az egytípusú kezelés két szintjének (A,B) hatását hogyan vizsgáljuk két járulékos tényező hatásának kiszűrésével (C = kontroll).

		Tényező 1		
		Blokk 1	Blokk 2	Blokk 3
Tényező2	Blokk 1	A	B	C
	Blokk 2	C	A	B
	Blokk 3	B	C	A

Például, ha a kísérlet helyéből és idejéből származó hibákat szándékozunk kizárni az egyetlen kezelésből és kontrollból álló kísérletben, akkor az alábbi elrendezést alkalmazhatjuk:

		Idő	
		Délelőtt	Délután
Hely	Parcella 1	KONTROLL	KEZELÉS
	Parcella 2	KEZELÉS	KONTROLL

A kezelt és kontroll csoportba tartozó egyedeket random módon választjuk ki, és a kísérletezés ismétlési szabályának megfelelően több egyedet rendelhetünk az idő és hely egyes szintjeihez.

2.4.4. Faktoriális elrendezés

A fenti elrendezésekben egyetlen tényező hatását vizsgáljuk, és a blokk és a latin négyzet alkalmazásával igyekszünk az alanyok és a környezet heterogenitásából származó csoporton belüli varianciát csökkenteni. A faktoriális kísérletben két vagy több tényező hatását egyszerre vizsgáljuk. A kezeléseket a tényezők kombinálásával állítjuk elő:

	Kezelés A		
Kezelés B	A_1B_1	A_2B_1	A_3B_1
	A_1B_2	A_2B_2	A_3B_2
	A_1B_3	A_2B_3	A_3B_3

Ezen elrendezésben mindkét kezelés 3-3 szintjét alkalmazzuk, ahol az indexek jelölik az A és B kezelés egyes szintjeit. Az összes lehetséges kezeléspárt használjuk. Habár a faktoriális kísérlet tervezése, kivitelezése és analizálása bonyolultabb az egytényezős kísérleteknél, alkalmazásával külön tudjuk választani a faktorok egyenkénti hatását (fő hatások) a faktorok együttes hatásától (interakció, ld. variancianalízis). A faktoriális elrendezés további előnye az

egyfaktorú kíséletekkel szemben, hogy a faktorok közti kölcsönhatásokat felderíthetjük és a kísérlet értelmezési tartományát kitoljuk.

Például, ha a hőmérséklet és talajnedvességtartalom hatását vizsgáljuk a levélfelületre, mindkét változó 2-2 szintjét alkalmazhatjuk. Így a kísérlet a kezelések alábbi kombinációit tartalmazza:

	Hőmérséklet (T)	
Talajnedvesség (W)	T_1W_1	T_2W_1
	T_1W_2	T_2W_2

3. Az adatok statisztikai jellemzése és hipotézisek vizsgálata

A statisztika numerikus adatok gyűjtésének, rendezésének és értékelésének tudománya. Habár a statisztika megjelenése egyidős a számolás kialakulásával, a statisztika mint tudomány csupán a 20. század első harmadában formálódott meg. Statisztikával a mindennapi élet számos formájában találkozunk pl. felmérésekben, hivatalok és vállalatok beszámolóiban, azonban jelentőségét igazán az alkalmazott tudományterületeken tudjuk felmérni. Ellentétben a fizikai jelenségekkel, amelyek gyakran exakt egyenletekkel leírhatók, a biológiai jelenségek statisztikai természetűek. Statisztika nélkül a biológiai jelenségek kapcsolatát kideritő biológia, orvosi- és mezőgazdasági tudományok nem képzelhetők el.

A statisztikát hagyományosan két részterületre osztják: leíró és döntéshozó statisztika. A leíró statisztika az adatok kvantitatív jellemzésével és összefoglalásával foglalkozik pl. eloszlások jellemzésével, míg a döntéshozó statisztika az adatok jellemzéséből származó információk alapján döntéseket hoz, pl. a minták azonos populációból származnak-e. Elsőnek a statisztika legfontosabb fogalmait (3.1.), majd az adatkezelés egyes fázisait tárgyaljuk (3.2.). A 3.3. fejezetben megkezdjük a döntéshozó statisztika ismertetését a hipotézisvizsgálattal. A leggyakrabban alkalmazott paraméteres és nem-paraméteres eljárásokról a 4. és az 5. fejezetben lesz szó. A leíró és döntéshozó statisztikáról részletes információ Sokal és Rohlf (1981), Moore és McCabe (1989) és Campbell (1990) kézikönyveiben található.

3.1. Statisztikai alapfogalmak

3.1.1. Terminológia

Populáció: az összes egyed amire a statisztikai analízis eredménye vonatkoztatható. Például, ha megmérjük öt ember magasságát akkor a populációnk az összes embert jelenti. Ezzel szemben ha öt húszéves kinai férfit mérünk meg, akkor a populációnk, amelyre az eredmények vonatkoznak, a húszéves kinai férfiak lesznek. Nagyon fontos pontosan definiálni az adott vizsgálat populációját, mivel ez befolyásolja az eredmények értelmezését. A populáció lehet végtelen nagy, mikor elméletileg sem számolható meg (pl. egy elvileg végtelenszer imételhető kisérlet eredménye), és lehet véges, mikor legalábbis elméletileg leszámolható (pl. a földön élő összes fehéregér). A megkülönböztetés azért fontos, mert a véges populációból történő mintavétel megváltoztathatja a későbbi mintavételek eredményét. A populáció paramétereit rendszerint görög betűvel jelöljük, pl: μ (átlag), σ (szórás).

Minta: a populáció valamely része (pl. a magyarországi fehéregerek a földön élő fehéregerek mintájának tekinthetők). Statisztikai szempontból lényeges, hogy a minta véletlenszerű legyen, vagyis a populáció összes egyede egyforma valószínűséggel kerüljön bele. Statisztikailag tehát a magyar fehéregerek nem jó mintája a földi fehéregereknek, hiszen ebbe a mintába az afrikai fehéregerek nem kerülhetnek bele. A minta paramétereit rendszerint latin betűvel jelöljük, pl: $\bar{x}$ (átlag), s (szórás).

Változó: a minta elemein mért mennyiség (pl. a húszéves kinai férfiak magassága). A változók tipusa eltérő lehet (3.1. táblázat), ezt az adott próba kiválasztásánál figyelembe kell venni.

3.1. táblázat. A változók típusai mérési skála szerint. Az első két skálát rendszerint kvalitatív (minőségi), míg az utóbbi kettőt kvantitatív (mennyiségi) skálának nevezik.

Mérési skála	Definició	Példák
Nominális skála	Nevekből álló kategóriális változó, amely értékeit rangsorba sem lehet állítani.	ivar (hím, nőstény), betegség (skizofrénia, depresszió).
Ordinális skála	Kvalitatív változó, értékei rangsorba állíthatók. Az értékek közti távolság nem rögzített, tetszőleges.	aggresszív viselkedés (gyenge, közepes, erős intenzitású).
Intervallumskála	A változó értékei rangsorba állíthatók, és az értékek közti különbség mutatja az értékek távolságát egymástól. A skála nulla pontja önkényes. A mérések aránya nem értelmezhető.	Celsius hőmérsékletskála, intelligenciahányados
Arányskála	A változó értékei közti intervallum mutatja az értékek távolságát. Az értékek aránya is értelmezhető, mivel a skála valódi nullaponttal rendelkezik.	testsúly, magasság, életkor

3.1.2. Az elméleti eloszlások

A matematikai módon jellemzett eloszlásokat elméleti eloszlásoknak hívjuk. Az eloszlás sűrűségfüggvénye megadja, hogy milyen valószínűséggel kapunk egy adott intervallumba eső értéket, ha egy olyan populációból veszünk mintát, amelyben a vizsgált változó az adott eloszlást követi. Az elméleti eloszlások két gyakran használt típusa a normál és a binomiális eloszlás.

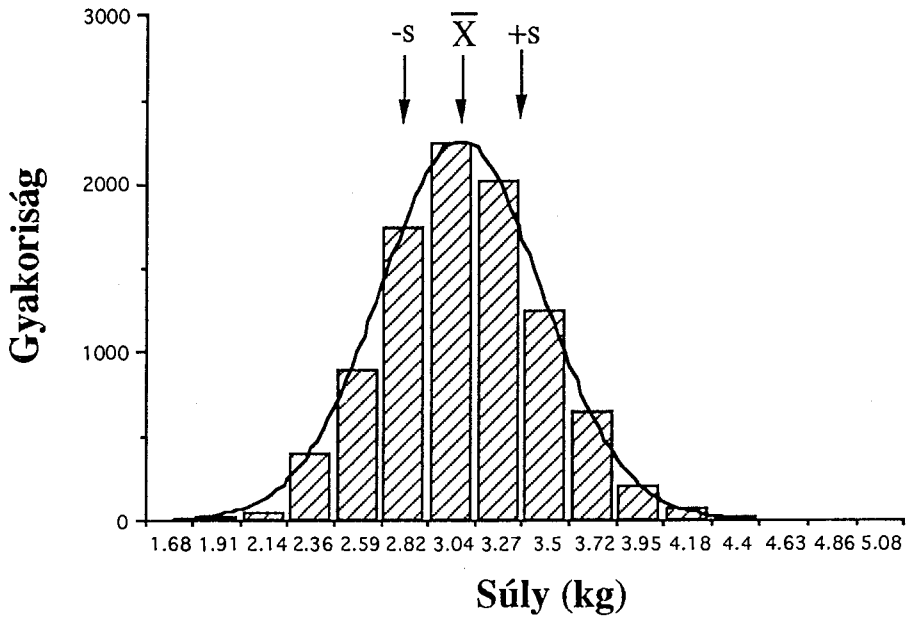
Normál eloszlás esetén feltételezzük, hogy a vizsgált változó értékére sok tényező hat és ezek hatásai összegződnek. A normál eloszlás folytonos, azaz a sűrűségfüggvény az értelmezési tartományon belül bármilyen értéket felvehet. Az eloszlást két paraméterrel adhatjuk meg: az átlaggal (μ, ld. 3.2.3.1.) és a szórással (σ, ld. 3.2.3.3.). Az eloszlás sűrűségfüggvénye a Gauss-féle haranggörbe (3.1. ábra):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

A binomiális eloszlás a diszkrét eloszlásokhoz tartozik, azaz a változó csupán bizonyos értékeket vehet fel. Binomiális eloszlást követ egy változó, ha a vizsgált jelenségnek kétféle kimenetele lehet. Például egy statisztikai kísérlet, pénzfeldobás, kimenetele csak fej vagy írás lehet. Vizsgáljuk meg egy esemény bekövetkezésének valószínűségét, pl. az írás dobásának valószínűségét. A binomiális eloszlást az alábbi formula alapján számoljuk:

$$P(x=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) p^k (1-p)^{n-k}$$



3.1. ábra. 9465 kinai fiu csecsemő születési súlyának eloszlása (oszlopok) és az adatokhoz illeszkedő normáleloszlás sűrűségfüggvénye ($\overline{X}$= 3.115 kg, s = 0.385 kg).

ahol P(x=k) az x=k esemény bekövetkezési valószínűsége, p egyetlen kísérlet eredményének bekövetkezési valószínűsége és n a kísérletek száma. Az események bekövetkezésének összes valószínűségét eseménytérnek nevezzük. A binomiális eloszlás jelölése B(n,p). A binomiális táblázat megadja az események bekövetkezési valószínűségeit, így nem szükséges p-ket számolni (3. táblázat). Számos más statisztikai táblázattal (pl. t-táblázattal, χ^2 táblázattal) szemben a binomiális táblázat nem kumulativ, így x=k esemény és az x<k események bekövetkezési valószínűségét úgy kaphatjuk meg, hogy az x=k és az x<k események bekövetkezési valószínűségeit összegezzük.

Vizsgáljuk meg a binomiális eloszlást egy példán keresztül.

3.1. példa. Egy kockát négyszer feldobunk. Eseménynek tekintjük, ha hatost dobunk - ennek elméleti valószínűsége p=1/6. Milyen valószínűséggel kapunk 0,1,2,3 vagy 4 db hatost ?

Nulla, 1,2,3 és 4 hatos bekövetkezésének a valószínűsége B(4,0.167) eloszlás esetében:

$$P(x=0)= \frac{4!}{0!4!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.482$$

$$P(x=1)= \frac{4!}{1!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.386$$

$$P(x=2)= \frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.116$$

$$P(x=3)= \frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0.015$$

$$P(x=4)= \frac{4!}{4!0!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0.001$$

1.000

Az öt esemény valószínűségeinek összege egyet ad. Eredményünket ellenőrizzük a 3. táblázatból !

3.2. Adatjellemzés

Az adatkezelés és adatértékelés első fázisa az adatok jellemzése. A legdurvább jellemzés az adatok táblázatba rendezése (3.2.1). A táblázatnál részletesebb információkat kaphatunk az adatok eloszlásának ábrázolásával (3.2.2) és az eloszlások numerikus jellemzésével (3.2.3).

3.2.1. A táblázatok

A táblázatkészítés célja, hogy lényeges információkat rendezett és tömör formában mutassunk be. Egy táblázat statisztikai célú elemzésekor meg kell állapítanunk (a) milyen populációra vonatkozik a táblázat, (b) milyen tulajdonságokat és változókat mértek a vizsgálatban, (c) milyen formában tünteti fel a táblázat az adatokat és (d) milyen tendenciákat lehet a táblázatból kiolvasni.

3.2. példa. Egy felmérésben a 11-15 év közötti gyerekek dohányzásának gyakoriságát vizsgálták Angliában és Walesben. Az alábbi táblázatban foglalták össze az eredményeket:

	Év			
Dohányzás gyakorisága (%)	1982	1984	1986	1988[1]
Fiúk				
Rendszeresen dohányzik	11	13	7	7
Alkalmanként dohányzik	7	9	5	5
Leszokott a dohányzásról	11	11	10	8
Egyszer dohányzott	26	24	23	23
Sohasem dohányzott	45	44	55	58
Mintanagyság	1460	1928	1676	1489
Lányok				
Rendszeresen dohányzik	11	13	12	9
Alkalmanként dohányzik	9	9	5	5
Leszokott a dohányzásról	10	10	10	9
Egyszer dohányzott	22	22	19	19
Sohasem dohányzott	49	46	53	59
Mintanagyság	1514	1689	1508	1529

[1] Csak Anglia

(a) Elsőnek állapítsuk meg a vizsgált populációt: 11-15 éves, Angliában és Walesben élő gyerekek 1982-1988 között. Egy lényeges információ a lábjegyzetbe rejtett: a vizsgált

populáció 1988-ban megváltozott a korábbi évekhez képest. A táblázat nem a teljes populációt tünteti fel, hanem egy mintát - azonban nincs információnk a mintavétel módjáról.

(b) Két kvalitatív változót vizsgáltak: a dohányzás gyakoriságát (5 kategória), és az alanyok nemét (2 kategória).

(c) A táblázat a nem és az év kombinációiban tünteti fel a dohányzási kategóriák százalékos gyakoriságát. A táblázat közli a mintaelemszámot is.

(d) Az évek előrehaladásával csökkent a dohányzásról leszokott fiúk százaléka, míg a soha nem dohányzott fiúk és lányok százaléka nőtt - feltéve, ha az angliai minta összetétele nem különbözött lényegesen az összevont angliai és wales-i mintától. A nemek között nem volt jellegzetes különbség. A sohasem dohányzók fordultak elő leggyakrabban az egyes nem/év kombinációkban pl. fiúk 45 %-a sohasem dohányzott 1982-ben, és ezt követi az egyszer rágyújtók gyakorisága pl. a lányok 22 %-a dohányzott egyszer 1984-ben.

3.2.2. Az adateloszlások ábrázolása

Egy változó adatainak mintázatát eloszlásnak nevezzük. Az eloszlás mutatja, hogy a változó mért egységei milyen gyakran fordulnak elő. Az eloszlások ábrázolásának két gyakori formája a törzs- és az oszlopdiagram.

3.2.2.1. A törzsdiagram

A növényi szárra és levélre emlékeztető törzsdiagram segítségével adataink eloszlását gyorsan és egyszerűen megnézhetjük, miközben az adatok numerikus értékeit megőrizzük. A törzsdiagram elkészítéséhez először adatainkat felosztjuk "szárra" (az első néhány helyiérték) és "levélre" (utolsó helyiérték). Ezután a szárat képező adatokat egymás alá írjuk és a jobb oldalukra egy függőleges vonalat húzunk. Végül a leveleket növekvő sorrendben beírjuk a szárak mellé.

3.3. példa. Huszonhét egyidős kísérleti nyúl tömegét grammokban lemérve az alábbi adatsort kapjuk:

1009	1031	1017	1025	985	1003	1024	997	1013	1002	988	990
973	1000	1018	1009	996	1002	1007	1013	1063	994	1028	1012
1010	1020	981									

Mivel a levél csupán egyetlen helyiértékű lehet, a szárat az első kettő vagy három helyiérték képezi:

97	3
98	1 5 8
99	0 4 6 7
100	0 2 2 3 7 9 9
101	0 2 3 3 7 8
102	0 4 5 8
103	1
104	
105	
106	3

A törzsdiagram jelentősége, hogy az eloszlás középpontját ránézésre vagy az adatok felének leszámolásával meg tudjuk állapítani (ld. 3.2.3.2.). A törzsdiagram segítségével megvizsgálhatjuk az eloszlás alakját is, pl. szimmetrikus-e. A törzsdiagram felhívja

figyelmünket az adatok hiányosságára és a szélsőséges értékekre, pl. a 3.3. példában ellenőriznünk kell, 1063 nem elírás vagy téves mérés eredménye-e.

3.2.2.2.Oszlopdiagram

A törzsdiagram előnyös tulajdonsága, hogy az összes adat numerikus értékét feltünteti, de az előny hátránnyá válik, amint nagymennyiségű adatot szeretnénk megvizsgálni. További hátrány, hogy a szár egységeit az első helyiértékek meghatározzák és ezektől eltérő besorolást nem alkalmazhatunk. Az oszlopdiagram alkalmazásával az utóbbi két probléma elkerülhető, habár az oszlopdiagram kézi megrajzolása lassúbb a törzsdiagramnál és az oszlopdiagram nem mutatja az adatok numerikus értékét.

A diagram előállításához az adatokat egyenlő intervallumú osztályokba soroljuk ügyelve, hogy minden adat csupán egyetlen osztályba kerülhessen és az osztályok között ne legyen hézag. Az osztályhatároknak nem kell biológiai jelentőséggel bírniuk. Az osztályok optimális számának megállapítására nincs formula, azonban túl kevés osztály esetén információt vesztünk, míg túl sok osztály létrehozásával az adatokat nem tömörítjük eléggé és az eloszlás egyenetlen lesz. Célszerű egyszerűen kezelhető számokat, pl. egész számokat választani osztályhatárul. Az osztályközép az alsó és felső osztályhatár átlaga.

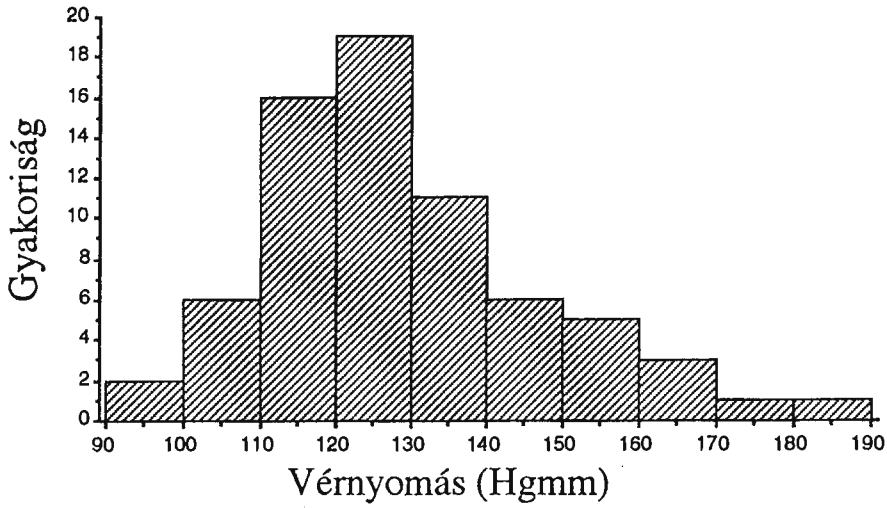
3.4. példa. Hetven 25-45 év közötti férfi szisztolés vérnyomását mérték, és az alábbi adatokat kapták Hgmm-ben:

99	148	151	120	116	143	110	110	131	110
136	123	177	117	137	163	113	120	110	105
108	120	116	133	130	138	125	123	124	127
101	123	153	118	127	132	120	147	161	121
122	168	112	186	153	120	96	155	138	123
117	121	144	117	107	115	152	146	109	133
128	118	123	106	117	121	115	130	145	136

Az adatok osztályba sorolásához gyakorisági táblázatot szerkesztünk, majd a táblázat alapján megrajzoljuk az oszlopdiagramot. A gyakorisági táblázatban kiszámíthatjuk az osztályok relatív gyakoriságait is. Az adatokat osztályba sorolva az alábbi gyakorisági táblázatot kapjuk:

Osztály	Gyakoriság (f_j)	Relatív gyakoriság (f_j/n)
90 - 99	2	0.03
100 - 109	6	0.09
110 - 119	16	0.23
120 - 129	19	0.27
130 - 139	11	0.16
140 - 149	6	0.09
150 - 159	5	0.07
160 - 169	3	0.04
170 - 179	1	0.01
180 - 189	1	0.01
n =	70	$\sum \frac{f_j}{n} = 1$

A gyakorisági táblázatból megrajzoljuk az oszlopdiagrammot (3.2. ábra).



3.2. ábra.Hetven férfi szisztolés vérnyomásának oszlopdiagramja

3.2.3. Eloszlások jellemzése

Az eloszlások numerikus, tömör jellemzésére szolgálnak a minta középpontjára és szóródására vonatkozó mérőszámok. A minta lokalizációját mutatja az átlag (3.2.3.1) és a medián (3.2.3.2), míg a minta diszpergáltságát a varianciával és szórással (3.2.3.3.), továbbá az interkvartális tartománnyal jellemezhetjük (3.2.3.4.). Az átlag és variancia jelentősége a paraméteres próbákban (4. fejezet), míg a medián fontossága a nem-paraméteres tesztekben válik nyilvánvalóvá (5. fejezet).

3.2.3.1.Átlag

Az $x_1, x_2, ... x_n$ adatból álló minta átlagát az alábbi módon számíthatjuk:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ahol $\sum_{i=1}^{n} x_i$ az 1-től n-ig lévő x_i-ek összege.

3.5. példa. A 3.3. példában ismertetett kísérleti nyulak átlagtömegét az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$\bar{x} = (1009 + 1017 + ... + 1020) / 27 = 1007.8 \text{ g}.$$

Az átlagot rendszerint egy tizedesjeggyel pontosabban adjuk meg, mint az adatokat. Az átlag mértékegysége megegyezik a mérési egységével. Az átlag különbözhet a minta összes adatától, de nem eshet azokon kívül.

Osztálybasorolt adatokra a mintaátlagot

$$\bar{x} = \frac{\sum_j f_j y_j}{\sum_j f_j} = \sum_j (rf)_j y_j$$

alapján számítjuk, ahol f_j a j-edik osztály gyakorisága, y_j az osztályközép és $(rf)_j$ a j-edik osztály relatív gyakorisága.

Habár az átlag alkalmazása széles körben elterjedt, felhasználását két tulajdonsága limitálja. Egyrészt, asszimetrikus eloszlásoknál az átlag nem reprezentálja az eloszlás középpontját. Másrészt, az átlag érzékeny a szélsőséges értékekre (nem rezisztens), ami hibát okozhat, hiszen éppen a szélsőértékek gyakran hibás mérések vagy jegyzőkönyvi elírások eredményei.

3.6. példa. Egy ökológiai vizsgálatban mérték 1 dm^3 iszapban található árvaszúnyoglárvák számát. Tíz mintában az alábbi lárvaszámot kapták:

25 238 45 94 16 23 30 16 22 123.

A minta átlaga

$$\bar{x} = (25 + 238 + 45 + ... + 123) / 10 = 63.2 \text{ lárva} / dm^3.$$

Az átlag azonban rosszul jellemzi a mintákban található lárvák denzitását, mivel a mintaszám nagyrészében az átlagnál kevesebb lárva volt, és csak három minta lárváinak száma volt az átlagnál nagyobb. Tételezzük fel, hogy az adatértékeléskor kiderül, a legnagyobb denzitást találó minta (238 lárva / dm^3) hibás mintavétel eredménye volt, így ezt az adatot ki kell zárni a feldolgozásból. Mennyit változik az átlag ? A kilenc mintából számolt átlag:

$$\bar{x} = (25 + 45 + ... + 123) / 9 = 43.8 \text{ lárva} / dm^3$$

Így egyetlen, szélsőséges adat kizárásával kapott átlag 31 %-kal változott a teljes mintából számolt átlaghoz képest.

3.2.3.2.Medián

Az átlag két előnytelen tulajdonságát orvosolja a medián. A medián az adatok középpontjának helye, azaz egyforma számú adat esik a mediántól "lefelé" és "felfelé". A medián kiszámításához az adatokat növekvő sorrendbe állítjuk, és a lista aljáról kezdve az (n + 1)/2-ik adatot kiválasztjuk. Ha n páratlan, a medián a rangsorba állított adatok középső értéke. Ha n páros, akkor a medián a rangsorba állított lista két középső adatának átlaga. A medián egysége a mért változó egységével megegyező. A medián a minta középpontjának rezisztens mérője és alkalmas az asszimmetrikus eloszlások középpontjának jellemzésére. A szimmetrikus eloszlások átlaga és mediánja egybeesik.

3.7. példa. A 3.6. példa tíz adatát használjuk. A minta mediánja

M = 11/2 = 5.5-ik adat.

Az 5.5-i adatot a minta sorba állítása után tudjuk kiválasztani:

16 16 22 23 25 30 45 94 123 238

így $M = (25 + 30)/2 = 27.5$ lárva/dm^3.

A 3.6. példa adatainak mediánja $M = 27.5$ lárva/dm^3. A minták középpontját a medián reprezentálja, mivel a mediántól balra és jobbra egyaránt öt-öt adat helyezkedik el. Vajon mennyit változik a medián, ha x = 238 szélsőséges értéket kizárjuk ? A szélsőséges érték kizárásával a medián keveset változott (9 %-ot), mivel

$M = (9 + 1)/2 = 5$. adat, azaz

$M = 25$ lárva/dm^3.

A törzsdiagramon a medián helye egyszerűen megállapítható (3.2.2.1). A medián által kétrészre osztott mintában hasznos megkeresni az alsó- és felső kvartiliseket is. A kvartilisek kiszámításakor először megkeressük a mediánt. A medián alatti adatok medián értéke az alsó kvartilis (K_1), míg a medián feletti adatok mediánja a felső kvartilis (K_3). A 3.3. példa adatainak alsó-és felső kvartilisét az alábbi törzsdiagram mutatja (a kvartilisek és a medián értékeit aláhúztuk):

97	3	
98	1 5 8	
99	0 4 <u>6</u> 7	K_1
100	0 2 2 3 7 <u>9</u> 9	M
101	0 2 3 3 7 <u>8</u>	K_3
102	0 4 5 8	
103	1	
104		
105		
106	3	

3.2.3.3.Variancia és szórás

A minta diszperziójának legelterjedtebb jellemzői. A variancia mutatja, mennyire terjednek szét az adatok a mintaátlag körül. Az n mérésből (megfigyelésből) álló minta (x_1, x_2, ... x_n) varianciáját

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

adja meg. Azaz, az adatok mintaátlagtól vett távolságát négyzetreemeljük, összegezzük és súlyozzuk 1/(n - 1)-vel . A négyzetreemelés szükséges, máskülönben $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$. Az n - 1-et szabadsági foknak (df) nevezzük. A szabadsági fok mutatja, hogy hány független adatból becsüljük a varianciát. Mivel $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$, egyetlen $x_i - \bar{x}$ különbséget ki tudunk számolni a többi különbség ismeretében. Így nem n független adatból, hanem csak n - 1 adatból becsüljük a varianciát.

A variancia számítását az alábbi képlet alapján végezzük:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right\} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - C}{n-1}$$

ahol C-t korrekciós tényezőnek nevezik:

$$C = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}$$

Osztálybasorolt változóknál a varianciát az alábbi képlet alapján számítjuk

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_j f_j y_j^2 - n\bar{x}^2\right\}$$

ahol f_j a j-edik osztály gyakorisága, y_j az osztályközép és $\bar{x}$ a mintaátlag.

Szórásnak (s) a variancia pozitív négyzetgyökét nevezzük ($\sqrt{s^2}$). A szimmetrikus eloszlások jellemzésére az átlagot és a szórást használjuk.

3.8. példa. Egy hegyi patakban a pisztráng ivadékok grammokban mért tömege az alábbi volt:

4.5 4.8 5.0 5.0 5.1 5.2 5.5 5.8 6.0 6.1.

A variancia

$$s^2 = 1/9[(4.5^2 + 4.8^2 + ... + 6.1^2) - (4.5 + 4.8 + .. + 6.1)^2 / 10] = 0.2\ g^2$$

és a szórás

$$s = \sqrt{0.28} = 0.53g.$$

3.2.3.4. Interkvartilis tartomány

A minta diszperziójának rezisztens jellemzője az interkvartilis tartomány. Az interkvartilis tartomány (IKT) az adatok 50 %-át tartalmazza, és kiszámítása a felsőkvartilis (K_3) és az alsókvartilis (K_1) ismeretében történik.

$$IKT = K_3 - K_1$$

3.9. példa. A 3.8. példa adatainak interkvartilis tartományát az alábbi módon határozzuk meg:

4.5 4.8 5.0 5.0 5.1 5.2 5.5 5.8 6.0 6.1.

M = (10 + 1)/2 = 5.5-ik adat,

M = (5.1 + 5.2)/2 = 5.15 g

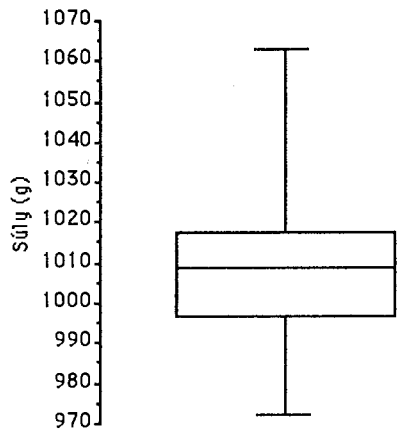
K_1 = 5.0 g

$K_3 = 5.8$ g

és

IKT = 5.8-5.0 = 0.8 g

A nem szimmetrikus eloszlások jellemzésére gyakran használják a kvartilis ábrát (3.3. ábra). A kvartilis ábra az eloszlás öt tulajdonságát mutatja: legkisebb adat, alsó kvartilis, medián, felső kvartilis, legnagyobb adat.



3.3 ábra. A 3.3. példa kvartilis ábrája. Legkisebb adat: 973 g, alsó kvartilis: 996 g, medián: 1009 g, felső kvartilis: 1018 g, legnagyobb adat: 1063 g.

3.2.3.5. Az átlag szórása

A lokalizáció és diszperzió fenti mérőszámai a mintára vonatkoznak, nem pedig arra a populációra, amelyből a minta származott. Természetesen kíváncsiak vagyunk, mennyire pontosan becsüljük mintánkkal a populációt. Az átlag pontosságát mérhetjük úgy, hogy egy populációból több azonos elemszámú mintát veszünk, kiszámítjuk a minták átlagait majd vesszük az átlagok szórását. Ezt a szórást nevezzük az átlag szórásának vagy hibájának ($S_{\bar{x}}$). Kimutatható, hogy $S_{\bar{x}}$ egyenlő a minta szórása osztva az elemszám négyzetgyökével:

$$S_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Az átlag szórását csökkenthetjük, azaz becslésünk pontosságát növelhetjük, ha csökkentjük a minták szórását, pl megfelelő kísérleti elrendezés megválasztásával vagy ha növeljük a minta elemszámát. Az átlag szórása nem keverendő össze a minta szórásával (ld. 3.2.3.3.).

3.3. Hipotézisvizsgálat

3.3.1. Bevezetés

A statisztika másik fő alkalmazási területe döntések meghozatala statisztikai hipotézisek vizsgálatával. A statisztikai hipotézist meg kell különböztetnünk a tudományos hipotézistől. Ez utóbbi az eddig felhalmozott ismereteken alapuló logikai váz, amelyből következtetések (predikciók) vonhatók le, amelyek összevethetők a valósággal. Ezzel szemben a statisztikai hipotézis egy egyszerű állítás a vizsgált populáció valamely tulajdonságáról: pl. az átlag egyenlő egy adott értékkel és a tapasztalt eltérést csak a véletlen okozta. A statisztikai hipotéziseknek két típusa van: (i) A nullhipotézis (H_0), amely pl. a különbség hiányát állítja (pl. $H_0: \overline{X} = 30$). A statisztikai hipotézisvizsgálat során a nullhipotézist teszteljük; (ii) Az alternatív hipotézis (H_1), ellentétben a nullhipotézissel, a különbség meglétét állítja (pl. $H_1: \overline{X} \neq 30$). Egy adott különbség kétféleképpen írható fel. Egyik lehetőség, amikor csak a különbség tényét rögzítjük, pl. $\overline{X} \neq 30$. Ebben az esetben $\overline{X}$ lehet nagyobb és kisebb is, mint 30, vagyis 30 mindkét oldalára eshet a számegyenesen. A másik esetben viszont rögzítjük, hogy $\overline{X}$ pl. csak nagyobb lehet 30-nál ($\overline{X} > 30$). Erre általában korábbi ismereteink alapján gyanakodhatunk. Ilyenkor $\overline{X}$ csak 30 egyik oldalára eshet. Az első esetben ($\overline{X} \neq 30$) a próbát kétoldalinak, a második esetben egyoldalinak nevezik. Ezek fontosságára a későbbiekben visszatérünk.

3.3.2. Döntéshozás

A null hipotézis ismeretében ki tudunk számolni egy próbastatisztikát (pl. t-értéket), amelynek az eloszlását ismerjük. Az eloszlást ismerve meg tudjuk mondani, hogy milyen valószínűséggel kaphatunk egy próbastatisztika-értéket, ha a nullhipotézis igaz. Ha ez a valószínűség kicsi, vagyis elég valószínűtlen, hogy H_0 igaz volta esetén ilyen értéket kapjunk, akkor H_0-t elvetjük és H_1 -t fogadjuk el. Fontos látni, nem azt jelentjük ki, hogy H_0 nem igaz, hanem csak azt, igen valószínűtlen az, hogy H_0 igaz lenne.

A döntésünk meghozatala közben kétféle hibát követhetünk el. Az elsőfajú hiba, amikor H_0 igaz, de mégis elvetjük a nullhipotézist. Ennek a hibának az elkövetési valószínűségét szignifikancia-szintnek nevezzük és α-val vagy p-vel jelöljük. Legyen pl. p= 0.05. Ebben az esetben, ha száz mintát vennénk és kiszámolnánk rájuk egy adott próbastatisztikát, akkor hiába igaz H_0 mind a százszor , öt esetben olyan értéket kapnánk, ami alapján H_0-t elvetnénk. A másik típusú hiba a másodfajú hiba, amikor H_0 hamis, mégsem vetjük el:

	H_0 igaz	H_0 hamis
H_0-t megtartjuk	jó döntés	másodfajú hiba
H_0-t elvetjük	elsőfajú hiba	jó döntés

Lássunk egy példát, amivel megismerjük az egymintás t-próbát is. A t-próbáról részletesebben lásd a 4. fejezetet.

3.10. példa. Egy viselkedési modell alapján tudjuk, hogy egy muslica átlagosan 30 másodpercig párzik. A laboratóriumunkban lévő muslica populációból megmérjük n = 17 hím párzási idejét. Azt kaptuk, hogy a mérések átlaga $\overline{X} = 32.86$ mp, míg szórása s = 9.82 mp.

Vizsgáljuk, vajon a megfigyelt 32.86 mp-es párzási időátlag származhat-e olyan populációból, ahol a valódi (parametrikus) átlag $\mu = 30$ mp.

Erre vonatkozólag felállítjuk staisztikai hiptézispárunkat:

$H_0: \overline{X} = \mu \quad H_1: \overline{X} \neq \mu.$

Statisztikusok kimutatták, hogy a

$$t_s = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}}$$

mennyiség t-eloszlást követ $H_0: \overline{X} = \mu$ igaz volta esetén ($S_{\overline{X}}$ az átlag szórása ld. 3.2.3.5. fejezetet). A t-eloszlást táblázatokban találhatjuk meg (csakúgy, mint a többi nevezetes eloszlást). A táblázat egy adott valószínűséghez tartozó kritikus t-értéket ad meg, vagyis kikereshetjük belőle, hogy milyen valószínűséggel kaphatunk a táblázatbeli értéknél nagyobb t-értéket. Mivel végtelen sok t-eloszlás létezik, amelyek a szabadsági fokban különböznek, ezért a táblázat számos szabadsági fokhoz megadja az értékeket.

Számoljuk ki a t-értéket a muslicák adatait használva.

$$S_{\overline{X}} = \frac{9.82}{\sqrt{17}} = 2.382$$

valamint

$$t_s = \frac{32.86 - 30.00}{2.382} = 1.201$$

Esetünkben a keresett t-eloszlás szabadsági foka, $df = n-1 = 17-1 = 16$.

Keressük ki a táblázatból (4. táblázat) a $df = 16$ -hoz tartozó kritikus értékeket:

df\p	0.90	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	...
...									
16	0.128	0.392	0.690	1.071	1.337	1.746	2.120	....	
....									

láthatjuk, hogy a számított értékünk $t_S = 1.201$ nagyobb mint $p = 0.30$-hoz tartozó $t = 1.071$ kritikus érték, de kisebb mint a $p = 0.20$-hoz tartozó $t = 1.337$ érték. Ez azt jelenti, hogy 20% és 30% közé esik annak a valószínűsége, hogy H_0 igaz volta esetén ilyen értéket kapjunk, más szavakkal az esetek ekkora százalékában követnénk el az elsőfajú hibát, ha H_0-t elvetnénk. Mivel az elsőfajú hiba 20-30 % -os elkövetési gyakorisága igen jelentős, ezért H_0-t nem vetjük el. Vagyis megállapíthatjuk, hogy a laboratóriumunk muslicáinak párzási ideje nem különbözik lényegesen az elmélet alapján várttól. Figyeljük meg, hogy nem azonosságot állítottunk, hanem a szignifikáns eltérés hiányát.

Egy kutatótársunk szintén mérte 17 hím muslica párzási idejét a saját laboratóriumában. A következőket kapta:

$\overline{X} = 26.45$ mp, $s = 6.65$ mp, $n = 17$.

$$S_{\overline{X}} = \frac{6.65}{\sqrt{17}} = 1.613$$

$$t = \frac{26.45 - 30}{1.613} = -2.201$$

A táblázatból kikeresve a df = 16 -hoz tartozó értékeket, azok közt nem találunk negatív előjelűeket. Mi a teendő ? Mivel a t-eloszlás nullára nézve szimmetrikus, ezért a táblázatban csak a pozitív értékeket adják meg. Így a kapot t-érték előjelét elhagyva kereshetjük ki a megfelelő valószínűséget. Ez esetünkben $0.05 > p > 0.01$ lesz vagyis 5 % és 1 % közé eső valószínűséggel kaphatunk H_0 igaz volta esetén ilyen eredményt. A H_0 téves elvetésével elkövethető hiba kicsi, így H_0-t nyugodtan elvethetjük és helyette a $H_1 : \overline{X} \neq 30$ alternatív hipotézist fogadjuk el. Megállapíthatjuk, hogy a második labor muslicáinak párzási ideje szignifikánsan különbözik az elméletileg várhatótól ($p < 0.05$ szinten).

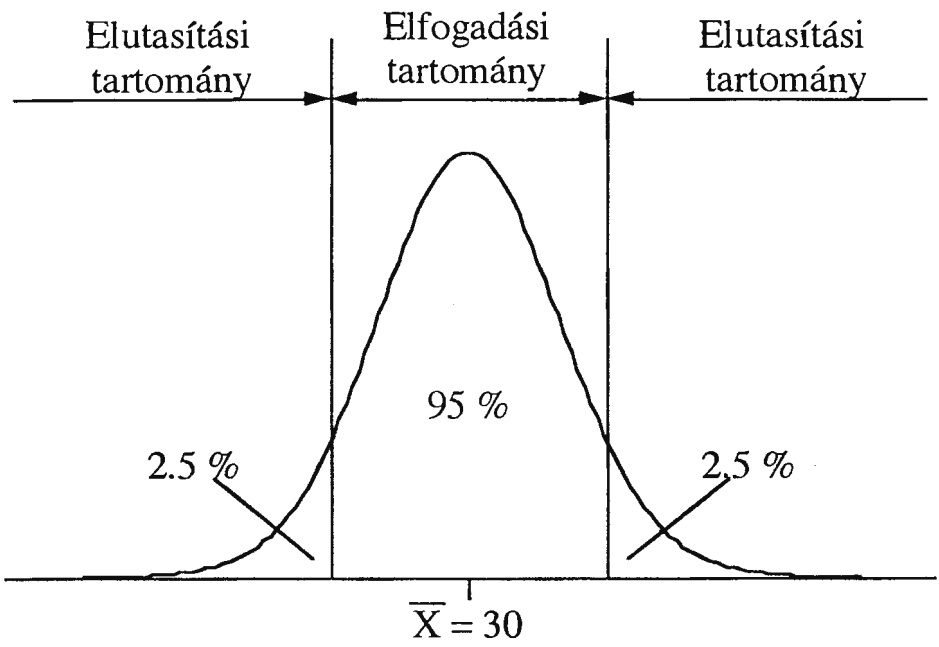
A biológusi gyakorlatban a $p < 0.05$, $p < 0.01$ és $p < 0.001$ szignifikancia-értékeket használjuk, vagyis ekkora (5, 1 és 0.1 %-os) elsőfajú hibát engedünk meg magunknak. Felmerülhet a kérdés: miért nem csökkentjük a szignifikancia-szintet mondjuk $p < 0.000001$ -re ? A szignifikancia szint csökkentésével nő a másodfajú hiba esélye, ezért nem érdemes a szignifikancia-szintet túl alacsonyra választani.

3.3.3. A próba ereje

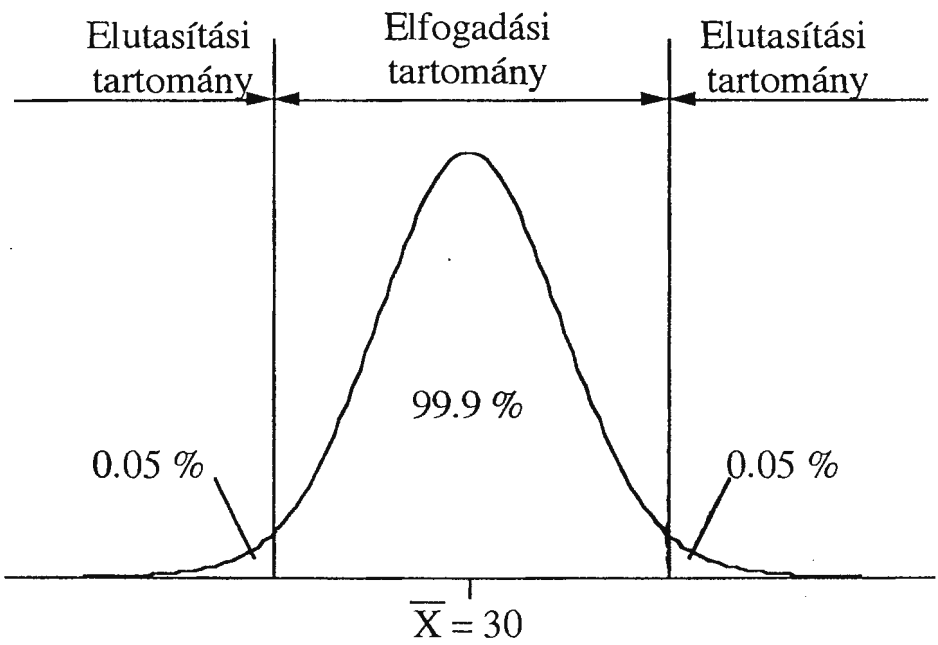
A próbastatisztikából visszaszámolva megkaphatjuk azokat a párzási időértékeket (pozitív és negatív irányban), amelyek felett vagy alatt már szignifikáns különbséget kapunk. Ez a két érték két tartományra osztja a párzási idők eloszlását (3.4a ábra). Ha a kapott átlagunk az elfogadási tartományba esik ($26.58 < \overline{X} < 33.41$) akkor $H_0 : \overline{X} = \mu$ -t elfogadjuk, ellenkező esetben elvetjük. Ha a szignifikancia-szintet csökkentjük pl. $p = 0.001$-re, akkor az elfogadási tartomány szélesedik (3.4b ábra). Hiába csökkentjük a hiba elkövetésének a valószínűségét, döntésünk pontatlanabbá válik, mivel az elfogadási tartomány szélesedett. Ez az egyik ok, amiért nem választjuk a szignifikancia-szintet túl alacsonyra. A másik ok a következő. Képzeljük el, hogy van egy olyan muslica populáció, ahol a parametrikus párzási idő 40 mp (3.5a ábra). Ha ebből a populációból veszünk mintát -- anélkül, hogy tudnánk, itt az átlag 40 mp -- akkor az esetek 30 %-ában kapunk az eredeti $H_0 : \overline{X} = 30$ null hipotézist támogató eredményt. Ez a százalékérték (jele: b) a másodfajú hiba valószínűsége. Minél közelebb van a két populáció átlaga egymáshoz, annál nagyobb a másodfajú hiba lehetősége (3.6 ábra), egyfelől. Másfelől, az elfogadási tartomány szélesedésével (ami egyet jelent a szignifikancia-szint csökkentésével) a másodfajú hiba valószínűsége szintén nő (3.5b ábra).

A próba erejének az 1-b mennyiséget nevezzük. Minél erősebb egy próba -- a fentiekből következőleg --, annál inkább képes két közeli populáció közötti különbséget detektálni. A próbák ereje a mintaszám emelésével növelhető.

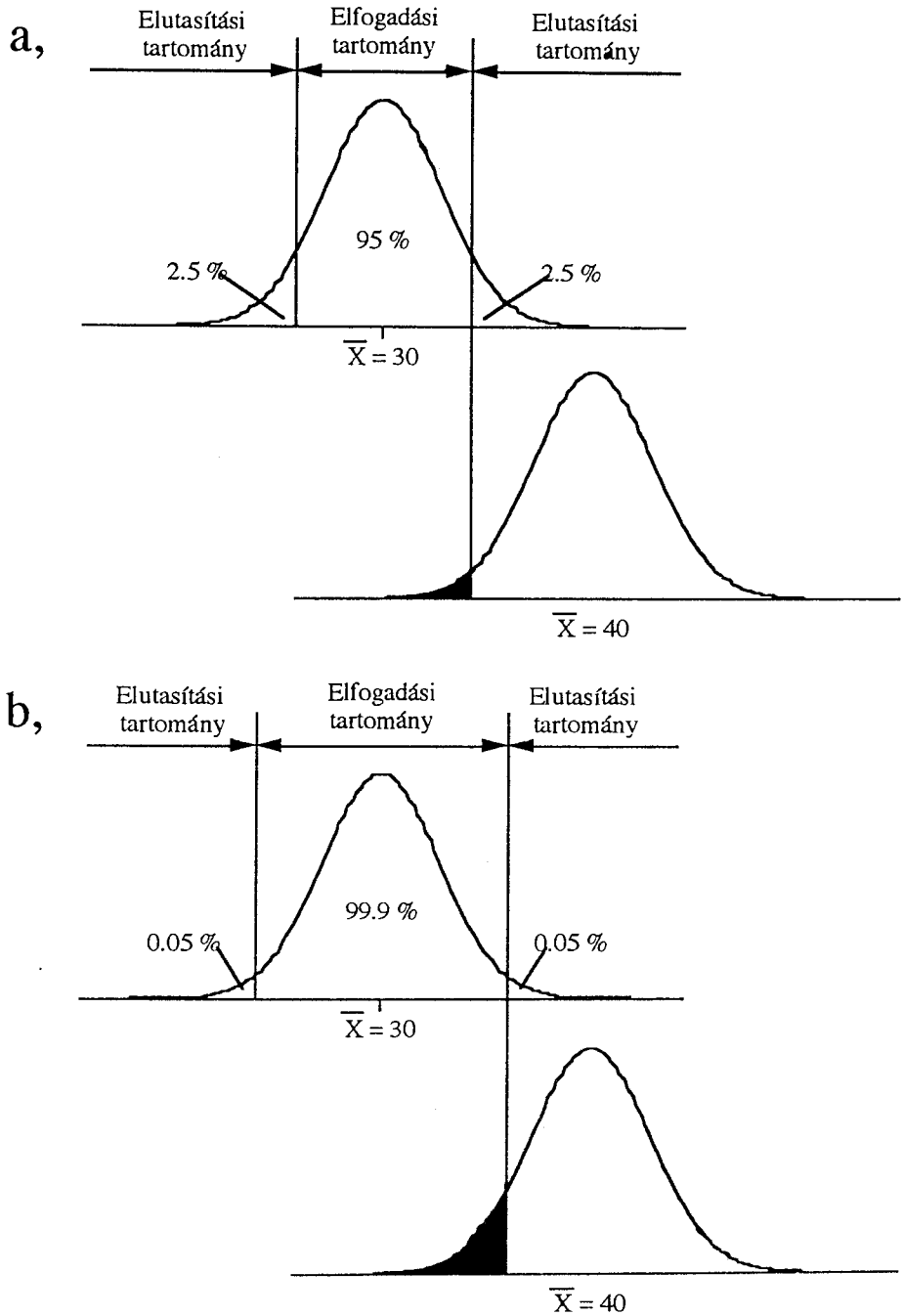
a,



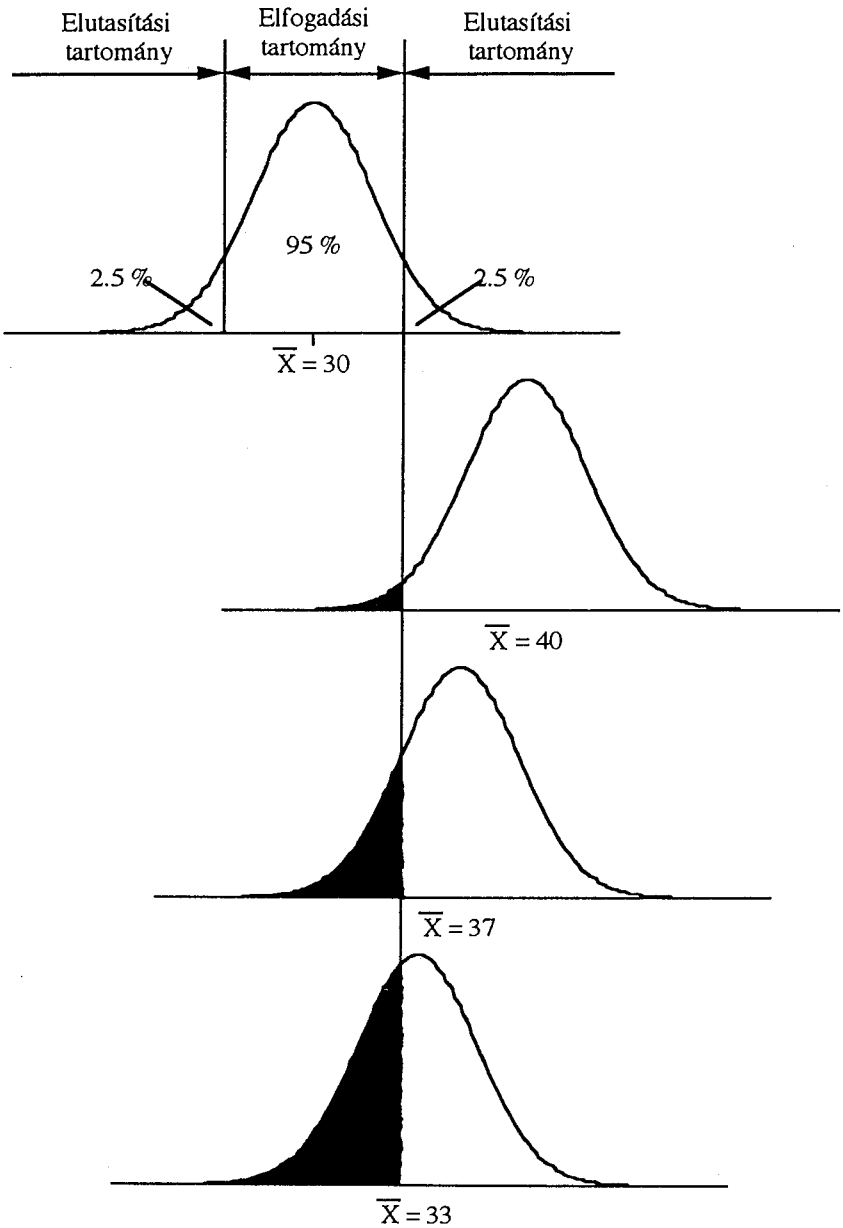
b,



3.4 ábra A muslicák párzási idejének eloszlása. A függőleges vonalak két tartományra osztják az eloszlást. A százalékértékek a görbe alatti terület nagyságát mutatják két különböző szignifikancia szint esetén: a, p = 0.05; b, p = 0.001.



3.5 ábra Két egymást átfedő eloszlású populáció esetén a nagyobb átlagú populációból vett minták egy jelentős része (árnyékolt terület) adhat az eredeti nullhipotézist támogató eredményt. A hiba lehetősége növekszik az elfogadási tartomány szélesedésével: a, p = 0.05; b, p = 0.001.



3.6.ábra A másodfajú hiba elkövetésének valószínűsége növekszik, ahogy a két vizsgált populáció átlaga közelít egymáshoz.

4. Paraméteres próbák

4.1. Bevezetés

A statisztikai hipotézisek eldöntésére alkalmas próbák két csoportba különíthetők el, parametrikus és nem-parametrikus próbák (5. fejezet).

A parametrikus próbák közös jellemzője, hogy feltételezik a vizsgált változók normáleloszlását (ld. 3.1.2.). Másik feltétel, hogy a mérések legalább intervallumskálán történjenek (ld. 3.1.1.), tehát kategóriába sorolt adatokon nem lehet pl. t-próbát végezni. A parametrikus próbák elnevezése onnan ered, hogy az általuk tesztelt nullhipotézisek a populáció eloszlásának valamely - elméletileg is jól leírható - paraméteréről állítanak valamit. Előnyeik közé tartozik: ha a feltételeik teljesülnek, akkor érzékenyebbek a nem-parametrikus megfelelőjüknél. Másik tulajdonságuk, hogy jól kidolgozott elmélet áll a hátterükben, így a próbastatisztikák eloszlása pontosan ismert.

4.2. Az egymintás próbák

A próbák ezen csoportjára jellemző, hogy a minta valamely jellemzőjének egyenlőségét teszteli egy elméleti (parametrikus) értékkel szemben.

4.2.1. Egymintás t-próba

Annak eldöntésére alkalmas, hogy a minta származhat-e egy adott átlagú (m) populációból, más szavakkal a mintából számított átlag ($\overline{X}$) megegyezik-e egy adott értékkel (μ). Feltétele a változó normális eloszlása. A feltétel tesztelését lásd az 5.5 fejezetben. A tesztelt hipotézispár:

$H_0: \overline{X} = \mu \quad H_1: \overline{X} \neq \mu$.

A próbastatisztika kiszámítása:

$$t_s = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}},$$

ahol $S_{\overline{X}}$ az átlag szórása.

t_s t-eloszlást követ n-1 szabadsági fokkal (df). A döntés meghozatalához a t-táblázatot (4. táblázat) kell használnunk. Amennyiben a számított t_s abszolút értéke nagyobb, mint az adott p szignifikancia-szinthez tartozó táblázatbeli t-érték - a számított szabadsági foknál -, akkor p szinten elvetjük a nullhipotézist. Ha az alternatív hipotézis egyoldalú pl. $H_1: \overline{X} > \mu$, akkor a szignifikancia-szintet felezni kell. A próbához tartozó példát (3.10. példa) lásd a Hipotézisvizsgálat c. fejezetnél (3.3.).

4.2.2. A mintából számított variancia nagyságának tesztelése

Néha fontos tudni -- pl. gyártmányellenőrzésnél --, hogy a populáció mintából becsült varianciája (s^2) megegyezik-e egy bizonyos értékkel (a szabvánnyal, σ^2) vagy nagyobb annál.

A próba feltétele a vizsgált változó normális eloszlása (teszt ld. 5.5. fejezet). A tesztelendő hipotézispár:

$H_0 : s^2 = \sigma^2 \quad H_1 : s^2 > \sigma^2.$

A számítandó statisztika:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2},$$

χ^2 (chi-négyzet)-eloszlást követ n-1 szabadsági fokkal. A χ^2-eloszlás szintén táblázatban van megadva. A döntés meghozatalához ki kell keresnünk az n-1 szabadsági fokhoz tartozó χ^2 - értékeket (11. táblázat). Ha a számított χ^2-értékünk nagyobb, mint a táblázatbeli érték, akkor az adott szinten elvetjük a hipotézist.

4.1. példa. Laboratóriumi üvegeszközöket előállító üzemben mérték a precíziós kémcsövek átmérőjét. Eldöntendő, hogy a gyártási hiba belül van-e a tűréshatáron. Húsz kémcsövet mértek meg (n = 20). A varianciát $s^2 = 0.423$-nek találták, a szabvány 0.25.

$$X^2 = \frac{(20-1)\cdot 0.423}{0.25} = 32.148$$

A $p = 0.05$ szinthez tartozó χ^2 -érték 30.144 (df = 19) (11. táblázat). Ennél a számított értékünk nagyobb, vagyis a $H_0 : s^2 = 0.25$ nullhipotézist 5%-os szinten elvethetjük, ami egyet jelent azzal, hogy a gyártás minősége nem felel meg a szabványnak.

4.3. Kétmintás próbák

A kétmintás próbák két minta valamely paraméterét hasonlítják össze.

4.3.1. F-próba

A parametrikus próbák alkalmazásának sokszor előfeltétele a vizsgált populációk varianciáinak egyenlősége. Ezt a feltételt tesztelhetjük F-próbával. Más esetekben is fontos lehet a varianciák összehasonlítása, pl. numerikus taxonómiában két eltérő elterjedésű populáció valamely jellegének azonos-e a varianciája.

Az F-próba feltétele, hogy a vizsgált jelleg eloszlása a populációban normális legyen. A tesztelendő hipotézispár:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2; \qquad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$

A számítandó statisztika:

$$F_s = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \qquad \text{ahol} \quad s_1^2 > s_2^2.$$

A statisztika F-eloszlást követ. Az F-eloszlást két szabadsági fok határozza meg: n_1-1 ill. n_2-1, ahol n_1 az s_1^2-hez, és n_2 az s_2^2-höz tartozó minta elemszáma. Az F-eloszlás táblázatokba van rendezve a szabadsági fokok szerint (5.táblázat). A táblázat egyoldalú, vagyis az eloszlás egyik végét tartalmazza. Ezért, ha a próbánk kétoldalú, akkor a táblázatbeli szignifikancia-szintet kettővel szorozni kell. A döntés úgy történik, hogy kikeressük a táblázatból a megfelelő szabadsági fokokhoz és szignifikancia-szinthez tartozó kritikus értéket. Ha a számított értékünk ennél nagyobb, akkor H_0-t elvetjük az adott szinten, ha kisebb akkor

elfogadjuk. Egyoldalú próba esetén ($H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ vagy $H_2: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$) ugyanígy járunk el azzal a különbséggel, hogy a szignifikancia-szintet nem szorozzuk.

4.2. példa. Egy brit-szigeti és egy magyarországi cinegepopuláció szárnyhossz-változatosságát hasonlították össze a szárnyhossz-szórások segítségével. A brit populációból vett minta szórása $s_1 = 3.347$ mm volt ($n_1 = 12$), míg a hazai cinkékre ez $s_2 = 4.337$ volt ($n_2 = 9$).

$$F_S = \frac{4.337^2}{3.347^2} = \frac{18.810}{11.202} = 1.679$$

$p = 0.05$-ös szinten vizsgálták a szórások egyenlőségét. Mivel a táblázat egyoldalú, ezért a kritikus értéket $p/2 = 0.025$ szignifikancia-szinthez és [8, 11] szabadsági fokokhoz keresték ki. Ez $F_{0.025[8,11]} = 3.66$ volt (5. táblázat). Ennél a számított érték kisebb, a nullhipotézist nem vethették el.

4.3.2. Páros t-próba

A páros próbák esetén a két minta összetartozó párokból áll, pl. ugyanazokon az alanyokon végzünk két mérést: egyet a kísérlet előtt és egyet pedig utána. A kísérletező a kísérlet hatását vizsgálja: változott-e a vizsgált jelleg vagy sem. Az ilyen problémák analizálásakor hasznos a páros t-próba. Alkalmazásának feltételei, hogy a vizsgált változó mind a két mintában normális eloszlást kövessen, a két változó szórása szignifikánsan ne különbözzön és a két megfigyelés közötti különbség ne függjön a megfigyelt értékek nagyságától.

A tesztelt hipotézisek:

$H_0: \overline{X}_1 = \overline{X}_2$; $H_1: \overline{X}_1 \neq \overline{X}_2$

Számításmenet: először kiszámítjuk az adatpárok különbségét (d_i), majd számítjuk d_i-k átlagát és szórását.

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{\left(\sum d_i\right)^2}{n}}{n \cdot (n-1)}}$$

A próbastatisztika:

$$t_s = \frac{\overline{d}}{S_d}, \qquad df = n-1,$$

amely t-eloszlást követ. Ha t_S nagyobb a kritikus értéknél, akkor H_0-t elvetjük, ellenkező esetben megtartjuk.

4.3. példa. Egy fiziológiai kísérletben vizsgálták az ijedtség vérnyomásra kifejtett hatására. E célból kiválasztottak tíz önként jelentkezőt és megmérték a vérnyomásukat. Ezután egy ajtót becsapva, hirtelen megijesztették őket, majd vérnyomásmérés következett. A következő eredményeket kapták:

Személy	Vérnyomás ijesztés előtt	után	különbség (d_i)	d_i^2
1	90	100	10	100
2	110	129	19	361
3	85	100	15	225
4	125	155	30	900
5	130	135	5	25
6	100	123	23	529
7	115	143	28	784
8	95	99	4	16
9	85	97	12	144
10	140	165	25	625
			171	3709

$$\bar{d} = 17.1$$

$$S_d = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot 9}\left(3709 - \frac{171^2}{10}\right)} = 2.953$$

$$t_S = \frac{17.1}{2.953} = 5.791, \quad df = 10-1 = 9.$$

A kapott t-érték (t_S) nagyobb, mint a táblázatbeli kritikus érték ($t_{0.001[9]} = 4.791$) (4. táblázat). Így levonhatjuk a következtetést, hogy az ijesztés szignifikánsan ($p < 0.001$) növelte a vérnyomást.

4.3.3. Kétmintás t-próba

A próbát annak eldöntésére használjuk, hogy két függetlenül mintázott populáció átlaga megegyezik-e.

A próba feltételei, hogy a minták függetlenek legyenek, a vizsgált változó normális eloszlású legyen és a két változó szórása megegyezzen.

A függetlenséget a mintavétel során kell biztosítani. A normalitás tesztelhető a Kolmogorov-Szmirnov próbával (ld. 5.5.3. fejezet), míg a szórások egyezését F-próbával vizsgálhatjuk (4.3.1. fejezet).

A tesztelt hipotézisek:

$H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2; \qquad H_1: \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2;$

A próbastatisztika:

$$t_S = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left[\frac{(n_1-1)\cdot s_1^2 + (n_2-1)\cdot s_2^2}{n_1+n_2-2}\right]\cdot\left(\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right)}},$$

ahol t_S t-eloszlást követ $df = n_1+n_2-2$ szabadsági fokkal. Ha a két minta nagysága egyenlő ($n_1 = n_2 = n$), akkor a képletünk egyszerűsödik:

$$t_S = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{1}{n}(s_1^2 + s_2^2)}}, \qquad df = 2(n-1).$$

Döntéskor a számított t_S-értéket hasonlítjuk a táblázatbeli kritikus értékhez (4. táblázat), a megfelelő szabadsági foknál. Ha a számított értékünk nagyobb a kritikus értéknél akkor a nullhipotézist elvetjük. Ha a próba egyoldalú ($H_1: \overline{X}_1 > \overline{X}_2$), akkor a szignifikancia-szintet felezzük.

4.4. példa. Házi rozsdafarkú etetési viselkedését vizsgálták. A megfigyelések során mérték a szülők által a fészekbe hordott rovarok hosszát. Vajon a hím és a tojó által behordott rovarok hossza eltérő-e ? A nullhipotézis, hogy a két nem által hozott rovarok hossza nem tér el. Egy korábbi vizsgálatból már ismert, hogy a bevitt rovarok hossza normális eloszlást követ.

A következő eredményeket kapták. A tojó által bevitt rovarok átlagos hossza $\overline{X}_1 = 128.5$ mm volt ($s_1 = 9.2$, $n_1 = 52$), míg a hím átlagosan $\overline{X}_2 = 131.9$ mm-es rovarokkal etette a fiókákat ($s_2 = 8.2$, $n_2 = 39$). Mivel a szórások nem különböztek (hogyan döntötték el ?) t-próbával hasonlították össze az átlagokat.

$$t_S = \frac{128.5 - 131.9}{\sqrt{\frac{51 \cdot 9.2^2 + 38 \cdot 8.2^2}{52+39-2} \cdot \frac{52+39}{52 \cdot 39}}} = -1.826 \quad , \qquad df = 89.$$

A táblázatban (4. táblázat) keresve a kritikus értéket egy problémába ütközünk: nem találunk df = 89-es szabadsági fokhoz tartozó sort. Csak df = 60 és df = 120-hoz vannak megadva az értékek. Ilyen esetekben általában lineáris interpolációt alkalmazunk.

$$t' = t_{60} + (t_{120} - t_{60}) \cdot \frac{df}{120 - 60},$$

ahol t' az interpolált érték, t_{60} és t_{120} a táblázatban szereplő szabadsági fokokhoz tartozó t-értékek. A számolást elvégezve p = 0.05-ös szignifikancia-szintre,

$$t' = 2.00 + (1.98 - 2.00) \cdot \frac{89}{120 - 60} = 1.97 \,.$$

A számított t_S-értékünk (abszolút értékben) kisebb, mint az interpolált érték. Így a nullhipotézis elutasítására nincs okunk, és nem állíthatjuk, hogy a két szülő különböző hosszúságú rovarokat hordott volna.

4.3.4. Kétmintás t-próba a szórások különbözősége esetén (Welch-próba)

Ha az F-próba alapján el kellett vetni a két vizsgált populáció szórásainak egyenlőségét, akkor t-próba helyett a Welch-próbát alkalmazhatjuk. Ez a próba a szabadsági fokot igazítja. A nullhipotézis ugyanaz, mint az előbbi t-próba esetében.

A minta statisztika:

$$t_S = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{S^2_{\overline{X}_1} + S^2_{\overline{X}_2}}},$$

t-eloszlást követt,

$$df = \frac{\left(S^2_{\overline{X}_1} + S^2_{\overline{X}_2}\right)^2}{\frac{\left(S_{\overline{X}_1}\right)^4}{n_1 - 1} + \frac{\left(S_{\overline{X}_2}\right)^4}{n_2 - 1}}$$

szabadsági fokkal.

A döntés során, csakúgy mint a t-próbánál, a számított értéket vetjük össze a táblázatival. A szabadsági fok meghatározásánál interpolációt alkalmazhatunk.

4.4. Varianciaanalízis

4.4.1. Bevezetés

Sok esetben előfordul, hogy nemcsak két, hanem több minta átlagát szeretnénk összehasonlítani. Különösen gyakori ez a kísérleti eredmények értékelésénél. A több minta átlagát azonban nem hasonlíthatjuk össze páronként t-próbával, mivel ebben az esetben az összehasonlítások nem függetlenek egymástól, és így a kapott szignifikancia szint nem valós. Célunkat a biometriában központi szerepet játszó varianciaanalízissel érhetjük el, amelyet R. A. Fisher fejlesztett ki e század harmincas éveiben. Gyakran nevezik ANOVA-nak is, amely az angol nevéből (ANalysis Of VAriance) képzett mozaikszó. A varianciaanalízisnek számos feltétele van, amelyekről külön fejezetben lesz szó (4.6. fejezet).

Több minta (csoport) esetén a mintákat összevonva egyetlen nagy mintába, kiszámíthatjuk ennek a nagy mintának a varianciáját. Ez a variancia két forrásra bontható fel: egyrészt az egyedi mérések eltérése a csoportátlagtól, másrészt a csoportátlagok eltérése az össz minta átlagától (nagyátlag). Az első varianciarészt nevezzük a csoporton belüli varianciának. Ennek kialakításában a figyelembe nem vett tényezők, a kisérleti hiba (egyszerűen szólva a véletlen) vesz részt. A második varianciarész a csoportok közötti variancia. Ha az egyes csoportok csak a véletlen miatt különböznek, akkor a csoportok közötti variancia kialakításában szintén csak a nem kontrolált tényezők és a kisérleti hiba játszik szerepet. Ebben az esetben mind a két variancia ugyanazt az értéket - a véletlen "okozta" varianciát - becsli (4.1a ábra). Ha azonban az egyes csoportokon különböző kezeléseket alkalmazunk, akkor várhatjuk, hogy a kezelések hatására a csoportok átlagai eltolódnak. Ez viszont a csoportok közötti variancia növekedésével jár (4.1b ábra), vagyis a két varianciarész a kezelések után már nem ugyanazt a varianciát becsli, így különböznek.

E két variancia közötti különbséget F-próbával tesztelhetjük.

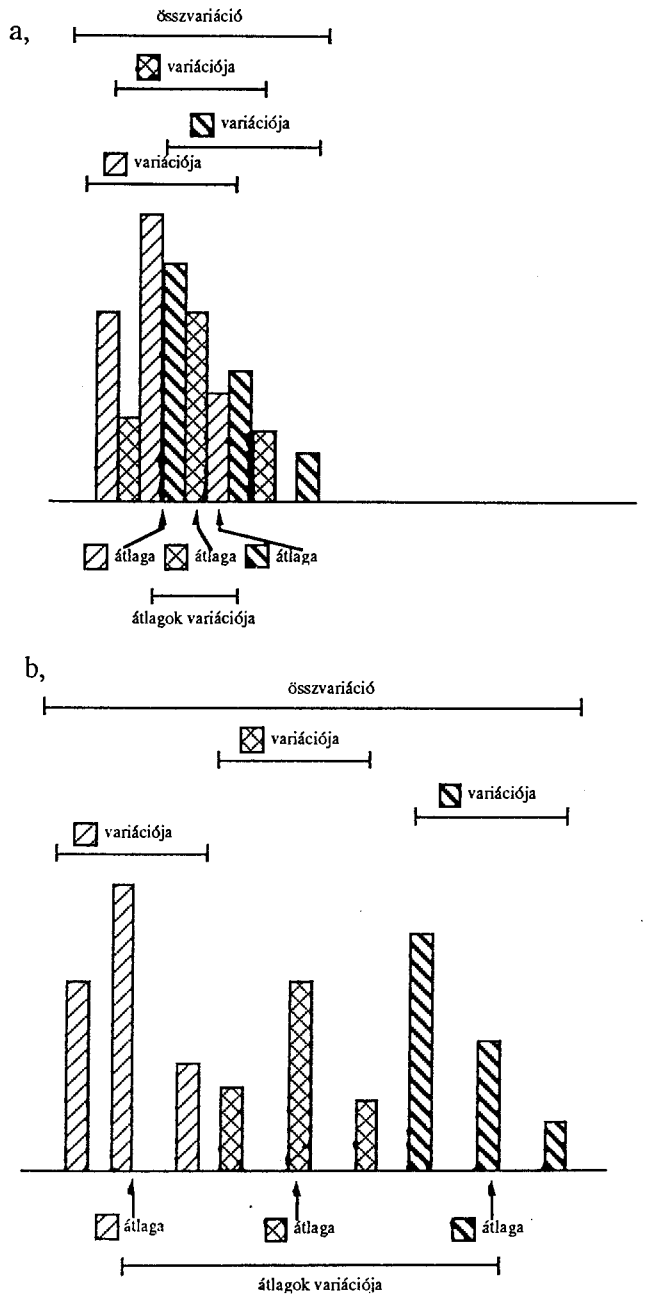
Az

$$F_S = \frac{s_k^2}{s_b^2},$$

próbastatisztikát hasonlítjuk az F-táblázatbeli értékhez (5. táblázat) df = [a-1, Σn_i-a] szabadsági fokoknál. Szignifikáns különbség esetén az átlagok különbözőségére következtethetünk. Lényeges különbség a kétmintás F-próbához (4.3.1. fejezet) képest, hogy varianciaanalízisben nem kell a táblázatbeli p-értéket felezni a szignifikancia-szint megállapításakor. Ez abból ered, hogy az ANOVA-ban mindig egyoldalú próbát használunk, mivel az alternatív hipotézisünk az, hogy $s_k^2 > s_b^2$, ui. a kezelés miatt mindenképpen s_k^2 növekedését várjuk. Az F-próbával tulajdonképpen azt teszteljük, hogy a kezelés által kialakított variancia rész eltér-e szignifikánsan a "véletlen" által kialakított maradék varianciától. Ha eltér akkor állíthajuk, hogy a kezelésnek volt hatása, ellenkező esetben azt, hogy nem volt.

A varianciaanalízis gyakorlatában a variancia elnevezés helyett a közepes négyzetösszeg (MS) használják. A varianciaanalízis eredményét az ún. ANOVA-táblában foglalják össze, feltüntetve a variabilitást előidéző tényezőket, a maradékot és az összeget. A maradék (csoporton belüli eltérésnégyzet összeg, error) becslése kell, hogy a lehető legpontosabb legyen, ui. ez tartalmazza a figyelembe nem vett tényezőket és a kisérleti hibát is, valamint

ehhez hasonlítják a kezelések hatását. Nagy maradék eltérésnégyzet összeg teljesen elmoshatja (kimutathatatlanná teszi) a kezelések egyébként meglévő hatását.



4.1 ábra A kezelés hatása az eltérő árnyalattal jelölt vizsgálati csoportokat leíró variációkra. a, kezelés előtt; b, kezelés után.

4.4.2. Számításmenet

Legyen x_{ij} az i-edik csoport j-edik eleme, 'a' a csoportok száma és n_i az i-edik csoport elemszáma. A számolás során a következő lépések alapján járunk el.

1. Minden mintaelemet összeadunk: $\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{ni} X_{ij}$.

2. A mintaelemek négyzeteit összegezzük: $\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{ni} X_{ij}^2$.

3. Összeadjuk a csoportösszegek négyzeteit osztva a csoport elemszámával: $\sum_{i}^{a} \frac{\left(\sum_{j}^{n_i} X_{ij}\right)^2}{n_i}$.

4. Kiszámítjuk a korrekciós tényezőt: $\frac{(1.mennyiség)^2}{\sum n_i}$.

5. Az összes eltérésnégyzet-összeg $SS_ö$ = (2.mennyiség)-(4.mennyiség).

6. A csoportok közötti eltérésnégyzet-összeg SS_k = (3.mennyiség)-(4.mennyiség).

7. A csoporton belüli eltérésnégyzet-összeg $SS_b = SS_ö - SS_k$.

Az ANOVA eredmény táblázat:

Variáció forrása	Szabadsági fok (df)	Eltérés-négyzet-összeg (SS)	Közepes négyzetes-összeg (MS)	F_S
csoportok között	a-1	SS_k	$MS_k = SS_k/df$	MS_k/MS_b
csoporton belül	Σn_i-a	SS_b	$MS_b = SS_b/df$	
összes	Σn_i-1	$SS_ö$		

Ha F_S nagyobb, mint a táblázatbeli $F_{[a-1,\Sigma n_i-a]}$ érték, akkor az átlagok egyezését állító nullhipotézist elvetjük.

4.5. példa. Egy laboratóriumban házilegyek szárnyhosszait mérték tizedmilliméteres pontossággal. A legyek három különböző üvegben, de ugyanazon a táptalajon növekedtek. Minden üvegből megmértek öt legyet. A mérési eredmények:

Üvegek		
1.	2.	3.
41	48	40
44	49	50
48	49	44
43	49	48
42	45	50
218	240	232

A kutatók arra keresték a választ, vajon a különböző üvegekben felnevelt legyek szárnyhossza különbözött-e. A kérdést varianciaanalízissel válaszolták meg.

Számításmenet:

1. $\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{n_i} X_{ij} = 41+44+...+50 = 690.$

2. $\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{n_i} X_{ij}^2 = 1681+1936+...+2500 = 31906.$

3. $\sum_{i}^{a}\frac{\left(\sum_{j}^{n_i} X_{ij}\right)^2}{n_i} = \frac{(218)^2}{5}+\frac{(240)^2}{5}+\frac{(232)^2}{5} = 31789.60.$

4. Korrekciós tényező: $\frac{(\text{1.mennyiség})^2}{\sum n_i} = \frac{(690)^2}{15} = 31740.$

5. $SS_ö = 31906-31740 = 166.00.$

6. $SS_k = 31789.60-31740 = 49.60.$

7. $SS_b = 166-49.60 = 116.40$

Az ANOVA eredmény táblázat:

Variáció forrása	Szabadsági fok (df)	Eltérés-négyzet-összeg (SS)	Közepes négyzetes-összeg (MS)	F_S
üvegek között	2	49.60	24.80	2.557
üvegeken belül	12	116.40	9.70	
összes	14	166.00		

Mivel F_S kisebb, mint $F_{0.05[2,12]} = 3.89$ (5. táblázat), ezért az átlagok egyenlőségét kimondó nullhipotézist nyugodtan megtarthatjuk. A kutatók levonhatják a következtetést, hogy a különböző üvegekben való tartás nem befolyásolja a legyek szárnyhosszát.

Végezzünk el egy gondolatkísérletet, az előbbi adatokat felhasználva. Tegyük fel, hogy a kutatók nem ugyanolyan táptalajon nevelték a legyeket, hanem három különfélét alkalmaztak: az első üvegben nem változtattak semmit, a másodikba növekedés-serkentőt, míg a harmadikba növekedésgátlót kevertek. Szimuláljuk ezeket a kezeléseket úgy, hogy az előző adattáblázat első oszlopán nem változtatunk semmit, a második minden eleméhez hozzáadunk hetet (növekedés-serkentés) és végül az utolsó oszlop minden eleméből kivonunk ötöt (növekedésgátlás):

Üvegek		
1.	2.	3.
41	55	35
44	56	45
48	56	39
43	56	43
42	52	45
218	275	207

Végezzük el ezekre az adatokra is a varianciaanalízist.

Számításmenet:

1. $\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{n_i} X_{ij} = 41+44+...+45 = 700$

2. $\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{n_i} X_{ij}^2 = 1681+1936+...+2025 = 33316$

3. $\sum_{i}^{a}\frac{\left(\sum_{j}^{n_i} X_{ij}\right)^2}{n_i} = \frac{(218)^2}{5}+\frac{(275)^2}{5}+\frac{(207)^2}{5} = 33199.60$

4. Korrekciós tényező: $\frac{(1.\text{mennyiség})^2}{\sum n_i} = \frac{(700)^2}{15} = 32666.667$

5. $SS_ö = 33316-32666.667 = 649.333$

6. $SS_k = 33199.600-32666.667 = 532.933$

7. $SS_b = 649.333-532.933 = 116.40$

Az ANOVA eredmény táblázat:

Variáció forrása	Szabadsági fok (df)	Eltérés-négyzet-összeg (SS)	Közepes négyzetes-összeg (MS)	F_S
üvegek között	2	532.933	266.467	27.471
üvegeken belül	12	116.40	9.70	
összes	14	649.333		

Az 1%-os szignifikancia-szinthez tartozó táblázatbeli kritikus érték $F_{0.01[2,12]} = 6.93$ (5. táblázat), ennél a számított értékünk jóval nagyobb, így elvethetjük az átlagok azonosságát állító nullhipotézist. Ebből a gondolatkísérletből láthatjuk, hogy a kezelések hatása tényleg növeli a csoportok közötti közepes négyzetösszeget, míg a csoportokon belüli közepes négyzetösszeg nem változott.

4.4.3. Csoportok közötti összehasonlítások

ANOVA használatával el tudjuk dönteni, hogy a vizsgált csoportok átlagai különböznek-e vagy sem. Nem tudjuk viszont, hogy a csoportok közül melyek különböznek és melyek nem. Az utóbbi problémát a csoportok közötti összehasonlításokkal tudjuk megválaszolni, amelyeknek két típusa van: az egyik az előre tervezett összehasonlítások, melyek során kérdéseink a kísérlet eredményétől függetlenek, pl. a kontrollcsoport és a kezelt csoportok különböznek-e. A másik típus az előre nem tervezett összehasonlítások. Ebben az esetben kérdéseinket a kísérlet eredményei alapján tesszük fel, pl. tudni szeretnénk, hogy a az átlagosan leghosszabb szárnyú csoport szignifikánsan különbözik-e a többitől, vagy van-e jelentős különbség a legkisebb és a legnagyobb csoport között.

Miért különböztetjük meg ezt a két típust ? Gondoljuk el a következő példát: van egy emberi populációnk, amelyben a magasságok eloszlása normális. Hasonlítsunk össze két kiválasztott ember magasságát. Ha véletlenszerűen választjuk ki a párokat, akkor a magasságkülönbségek eloszlása normális lesz, és ennek alapján egyszerűen el tudjuk dönteni, hogy a pár két tagja származhat-e ugyanabból a populációból. Ha viszont úgy választjuk ki a

párokat, hogy köztük a különbség nagy legyen, akkor a különbségek eloszlása már nem lesz normális és ezért más módszert kell használnunk, hogy eldönthessük: ugyanabból a populációból származott-e a két választottunk. Nos, a véletlen mintavétel példázza az előre tervezett összehasonlításokat, míg a nagy különbségre törekvő mintavétel az előre nem tervezetteket. Azért kell tehát különbséget tenni a két összehasonlítás között, mert más a mögöttük rejlő eloszlás, és így nem alkalmazhatjuk ugyanazt a szignifikancia-szint megadást mind a két esetben.

4.4.3.1. Előre tervezett összehasonlítások

Az itt ismertetett módszer csak az ortogonális összehasonlításokra ad helyes eredményt. Mitől ortogonálisak az összehasonlítások ? Először is csak a-1 ilyen összehasonlítás van, ahol "a" a csoportok száma a varianciaanalízisben. A második feltétel egy kicsit bonyolultabb. Képezzük az $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$,..., $\overline{X}_a$ átlagok lineáris kombinációját a következő módon:

$$Lj = c_{1j}\overline{X}_1+...+c_{ij}\overline{X}_i+...+c_{aj}\overline{X}_a, \text{ ahol } c_{ij} \in \Re.$$

A c_{ij} koefficienseket (amelyek tetszőlegesek) kontrasztoknak nevezzük, ha

$$\sum_i c_{ij} = 0$$

Az összehasonlításban a c_{ij}-koefficienseket úgy választjuk meg, hogy amely átlag nem vesz részt az összehasonlításban ahhoz nulla kontrasztot rendelünk hozzá, míg a két összehasonlítandó csoportba tartozó átlagok pozitív ill. negatív kontrasztot kapnak. Lássunk egy példát: van öt átlagunk és vizsgáljuk, eltér-e az első kettő szignifikánsan a másik háromtól, vagyis a következő egyenlőtlenséget teszteljük:

$$\overline{X}_1 = \overline{X}_2 \neq \overline{X}_3 = \overline{X}_4 = \overline{X}_5,$$

ebben az esetben a kontrasztok rendre $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = -0.33$, $c_4 = -0.33$ és $c_5 = -0.33$. Ezekre a fenti feltétel teljesül, ui. összegük nulla:

$$0.5+0.5+(-0.333)+(-0.333)+(-0.333) = 0.$$

Ha csak a 3. és 5. átlagot akarjuk összehasonlítani, akkor kontrasztjaink: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_4 = 0$ és $c_5 = -1$. A kontrasztok segítségével már könnyen megadhatjuk az ortogonális összehasonlítás másik feltételét:

$$\sum_{i=1}^{a} n_i \cdot c_{ij} \cdot c_{ik} = 0$$

vagyis két összehasonlítás (j és k) akkor ortogonális, ha a mintanagyságok kontrasztokkal vett szorzatainak összege nulla. A feltételek után lássuk az összehasonlítások módját, amely az eltérésnégyzetek felbontásán alapul.

Először vesszük az összehasonlítandó csoportok összegét, külön-külön négyzetre emeljük és elosztjuk a mintanagysággal. Ezután összeadjuk ezeket a hányadosokat. Ebből az összegből kivonjuk az összes összehasonlítandó csoport összegének négyzetét, osztva ezek mintanagyságának összegével. Az eredmény egy eltérésnégyzet-összeg k-1 szabadsági fokkal, ahol k az összehasonlított csoportok száma. Ezt az eltérésnégyzet-összeget osztva a szabadsági fokával egy közepes négyzeteseltérést kapunk, amelyet F-próbával tesztelhetünk a varianciaanalízis csoporton belüli közepes négyzeteseltéréssel szemben.

Ha az elvégzett összehasonlításaink ortogonálisak, akkor az összehasonlításokkal kapott eltérésnégyzet-összegeket összeadva a csoport közötti eltérésnégyzet-összeget nyerjük.

4.6. példa. Az előbbi "kísérletünkben" (4.5 példa) láttuk, hogy az alkalmazott kezelések szignifikáns különbséget okoztak az átlagokban. Most tudni szeretnénk, hogy van-e különbség:

1. a kontroll és a kezeltek,
2. ill. a kezeltek között.

Írjuk fel először a kontrasztokat, hogy lássuk a tervezett összehasonlításunk ortogonális-e. (Mivel összehasonlításunkat nem a kísérlet eredményei alapján végezzük, így az szükségképpen előre tervezett.)

	Kontroll	Serkentő	Gátló	
$\overline{X}$	43.6	55.0	41.4	
x_{ij}	218	275	207	
n_i	5	5	5	
Kontroll vs. kezelés	+2	-1	-1	$\Sigma 0$
Serkentő vs. gátló	0	1	-1	$\Sigma 0$

$$(+2 \cdot 0) + (-1 \cdot +1) + (-1 \cdot -1) = 0$$

Látható, hogy összehasonlításaink ortogonálisak.
A megfelelő eltérésnégyzet-összegek kiszámítása:
Kontroll vs. kezelés:

$$SS_{kk} = \frac{(218)^2}{5} + \frac{(275+207)^2}{5+5} - \frac{(218+275+207)^2}{5+5+5} = 70.533,$$

df = 1 és így $MS_{kk} = 70.533$.
Serkentő vs. gátló:

$$SS_{sg} = \frac{(275)^2}{5} + \frac{(207)^2}{5} - \frac{(275+207)^2}{10} = 462.4,$$

df = 1, így $MS_{sg} = 462.4$.

Eredményeinket ANOVA-táblába rendezve értékeljük:

Variáció forrása	Szabadsági fok (df)	Eltérés-négyzet-összeg (SS)	Közepes négyzetes-összeg (MS)	F_S
üvegek között	2	532.933	266.467	27.471***
kontroll vs. kezelés	1	70.533	70.533	7.271*
serkentés vs. gátlás	1	462.400	462.400	47.670***
üvegen belül	12	116.400	9.700	
összes	14	649.333		

* $p < 0.05$; ** $p < 0.01$; *** $p < 0.001$

A táblázatból kiolvasható, hogy a csoportok átlagai szignifikánsan különböznek. Ezenbelül mind a kontroll csoport különbözik a kezeltektől, mind a kezeltek különböznek egymástól.

4.4.3.2. Előre nem tervezett összehasonlítások

Az előre nem tervezett összehasonlításokra jellemző, hogy nincs megkötés az összehasonlítások számára, sem az összehasonlítás típusára (az ortogonalitás nem feltétel). Mivel a háttérfeltételek nem annyira tisztázottak, mint az előre tervezett összehasonlítások esetében, ezért módszerek sokasága áll rendelkezésre. A módszerek közös lényege, hogy az összehasonlítandó csoportok átlagainak különbségét teszteli egy előre kiszámított értékkel a legkisebb vagy minimális szignifikáns differenciával (LSD vagy MSD) szemben. Ha a különbség nagyobb vagy egyenlő az LSD-nél, akkor a két csoport szignifikánsan különbözik. Az LSD kiszámítása a különböző módszereknél hasonlóan történik:

LSD vagy MSD = (kritikusérték) x SE,

ahol a kritikusérték a különböző az adott módszer által éppen megkívánt táblázatbeli érték, míg az SE a varianciaanalízis csoporton belüli közepes négyzeteseltérés különböző transzformációja.

Itt két elterjedt próbát ismertetünk, a Tukey-próbát egyenlő mintanagyságokra, és a Tukey-Kramer próbát eltérő mintanagyságokra.

Tukey-próba

Az előzőleg közölt képletet használjuk az MSD kiszámítására. A kritikus értéket a $Q_{\alpha[k,\nu]}$ értékek táblázatából veszük (15. táblázat), ahol α a szignifikancia-szint, k a csoportok száma és ν a csoporton belüli közepes négyzeteseltérés (MS_b) szabadsági foka. SE egyenlő:

$$SE = \sqrt{\frac{MS_b}{n}},$$

ahol n a csoportok nagysága.

A fentiek alapján a minimális szignifikáns differencia a következő:

$$MSD = Q_{\alpha[k,\nu]} \cdot \sqrt{\frac{MS_b}{n}}.$$

Ha az összehasonlítandó két csoport átlagának különbsége ($|\overline{X}_i - \overline{X}_j|$) nagyobb vagy egyenlő MSD-nél akkor a különbségük szignifikáns.

4.7. példa. A legyes példára visszatérve (4.5 példa), vizsgáljuk, hogy a kontroll-üveg legyei és a növekedésgátlót kapott legyek szárnyhossza különböző-e. A mintanagyságok megegyeznek, így a Tukey-próbát használhatjuk.

Számítás:

$Q_{0.05[3,12]} = 3.77,$

$$SE = \sqrt{\frac{9.7}{5}} = 1.393$$

$MSD = 3.77 \cdot 1.393 = 5.252$

A két csoport átlagának különbsége:

$|\overline{X}_K - \overline{X}_G| = 43.6\text{-}41.4 = 2.2,$

ez kisebb, mint a kiszámított MSD, ezért állíthajuk, hogy a kontroll és a gátlószert kapott csoport átlaga nem különbözik szignifikánsan.

Tukey-Kramer próba

A Tukey-próbánál használt kritikus $Q_{\alpha[k,\nu]}$ értéket használjuk itt is (15. táblázat). Az SE kiszámítása azonban különbözik:

$$SE_{ij} = \sqrt{\frac{MS_b \cdot \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}{2}},$$

így

$$MSD_{ij} = Q_{\alpha[k,\nu]} \cdot SE_{ij}$$

További különbség, hogy míg a Tukey-próbánál elegendő volt egyetlen MSD-értéket kiszámítani, itt minden összehasonlítandó ij-párra külön ki kell számolni az MSD_{ij}-ket. A döntés az előző próbához hasonlóan történik: ha $|\overline{X}_i - \overline{X}_j| \geq MSD_{ij}$, akkor a különbség szignifikáns.

4.8. példa. Taxonómusok egy tetűfaj négy földrajzi változatát vizsgálták meg, századmilliméterben mérve a hátpajzs hosszát. Mérési eredményeiket a következő összefoglaló táblázat tartalmazza:

Földrajzi hely	$\overline{X}$	s^2	n_i
New England	372.25	54.21	8
Hudson	354.40	142.04	10
Chesapeake Bay	355.30	79.56	13
North Carolina	361.33	233.07	6

Varianciaanalízissel a csoportok között szignifikáns differenciát találtak:

Variáció forrása	Szabadsági fok (df)	Eltérés-négyzet-összeg (SS)	Közepes négyzetes-összeg (MS)	F_S
helyek között	3	1807.7	602.6	5.26**
helyeken belül	33	3778.0	114.5	
összes	36	5585.7		

** $p < 0.01$

A kutatók vizsgálták, vajon a legnagyobb és a legkisebb átlagú tetűcsoport különbözik-e. Ez egy előre nem tervezett összehasonlítás, mivel az analízis eredménye alapján történik (legnagyobb vs. legkisebb). A mintanagyságok különbözősége miatt a Tukey-Kramer próbát kell alkalmazni.

Számítás:

$\overline{X}_{max} = 372.25$, $\overline{X}_{min} = 354.40$,

$n_{max} = 8$, $n_{min} = 10$,

$Q_{[4,33]} \approx 3.84,$

$$SE_{max,min} = \sqrt{\frac{114.5 \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right)}{2}} = 3.589,$$

$$MSD_{max,min} = 3.84 \cdot 3.589 = 13.782,$$

$$\left|\overline{X}_i - \overline{X}_j\right| = 17.850.$$

Ez a különbség nagyobb, mint a számított MSD, így a két csoport közötti különbség $p < 0.05$-ös szinten szignifikáns.

4.5. Kétfaktoros varianciaanalízis

Az eddigi vizsgálódásunk során csak egy kezelés (növekedést befolyásoló szerek; földrajzi elhelyezkedés) hatására koncentráltunk. Beállíthatunk azonban olyan kísérleteket is, amelyben nemcsak egy kezelésünk van, hanem kettő, vagy több. Az ilyen kísérletek elemzésére is alkalmas a varianciaanalízis. A két- vagy többfaktoros ANOVA-val lehetőségünk van két vagy több kezelés hatásának tanulmányozására, valamint vizsgálhatjuk a kezelések közötti kölcsönhatást, az interakciót is. A továbbiakban csak a kétfaktoros ANOVA-val foglalkozunk.

A kezelések közötti interakción azt értjük, hogy az egyik kezelésnek eltérő hatása van a másik kezelés különböző fokozatai mellett. Jó példa az interakcióra szinergizmus jelensége, mikor az egyik méreg pl. nehézfém-ion másképpen fejti ki hatását, ha egy másik nehézfém-ion is jelen van.

A kétfaktoros ANOVA-tábla a variációk új forrásával bővül. A csoportok közötti eltérésnégyzet-összeg felbontódik a sor ill. oszlop (a két kezelés) és az interakció (a kezelések kölcsönhatása) eltérésnégyzet-összegére. Ezen eltérésnégyzet-összegekből számított átlagos négyzeteseltéréseket teszteljük F-próbával a csoporton belüli átlagos négyzeteseltéréssel szemben. Ha a csoportok közötti átlagos négyzeteseltérést szignifikánsnak találjuk, akkor megállapíthatjuk, hogy a csoportok átlagai különböznek egymástól. Ha a sor ill. oszlop átlagos négyzeteseltérésre kapunk szignifikáns eredményt, akkor feltehetjük, hogy az alkalmazott kezelésünknek (egyiknek, másiknak vagy mindkettőnek) jelentős hatása volt az átlagokra.

Ha az interakció szignifikáns, akkor egyik kezelés hatását sem értékelhetjük a másik nélkül, mivel a hatás mértéke, iránya a másik kezeléstől függően változik.

4.5.1. Számításmenet egyenlő mintanagyságokra.

Legyen x_{ijk} az i-edik sor és a j-edik oszlop k-adik eleme. Alapadat-táblázatunkban legyen r sor, c oszlop és mintánként n elem. Az egyenlő mintanagyságok jelentősen egyszerűsítik a számításmenetet.

1. Minden mintaelemet összeadunk: $\sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}\sum_{k}^{n} X_{ijk}$.

2. A mintaelemek négyzeteit összegezzük: $\sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}\sum_{k}^{n} X_{ijk}^2$.

3. Összeadjuk a csoportösszegek négyzeteit osztva a csoport elemszámával: $\frac{\sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}\left(\sum_{j}^{n}X_{ij}\right)^2}{n}$.

4. Korrekciós tényező: $\frac{(1.\text{mennyiség})^2}{r \cdot c \cdot n}$.

5. $SS_ö$ = (2.mennyiség)-(4.mennyiség).

6. SS_k = (3.mennyiség)-(4.mennyiség).

7. $SS_b = SS_ö - SS_k$.

Az eddigi lépések (az indexelést kivéve) megegyeztek az egyfaktoros ANOVA-val. Most kiszámítjuk a kezelések és az interakció eltérésnégyzet-összegét:

8. A sorösszegek négyzetösszege osztva a soron belüli elemek számával: $\frac{\sum_{i}^{r}\left(\sum_{j}^{c}\sum_{k}^{n}X_{ijk}\right)^2}{c \cdot n}$.

9. Az oszlopösszegek négyzetösszege osztva az oszlopon belüli elemek számával: $\frac{\sum_{j}^{c}\left(\sum_{i}^{r}\sum_{k}^{n}X_{ijk}\right)^2}{r \cdot n}$.

10. SSr = (8.mennyiség)-(4.mennyiség).

11. SSc = (9.mennyiség)-(4.mennyiség).

12. SSi = (6.mennyiség)-(10.mennyiség)-(11.mennyiség).

Az ANOVA-tábla:

Variáció forrása	Szabadsági fok (df)	Eltérés-négyzet-összeg (SS)	Közepes négyzetes-összeg (MS)	F_S
csoportok között	rc-1	SS_k	$MS_k = SS_k/df$	MS_k/MS_b
sorok között	r-1	SS_r	$MS_r = SS_r/df$	MS_r/MS_b
oszlopok között	c-1	SS_c	$MS_c = SS_c/df$	MS_c/MS_b
interakció	(r-1)(c-1)	SS_i	$MS_i = SS_i/df$	MS_i/MS_b
csoporton belül	rc(n-1)	SS_b	$MS_b = SS_b/df$	
összes	rcn-1	$SS_ö$		

A szignifikancia-vizsgálat a szokásos módon F-próbával az adott közepes négyzeteseltéréshez tartozó szabadági fokon történik.

4.9. példa. Kutatók patkányok táplálék-preferenciáját vizsgálták, friss és avas szalonnát kínálva az állatoknak (első kezelés). A kísérlet eredményeképpen feljegyezték az elfogyasztott szalonna mennyiségét. Rögzítették ezenkívül az állatok ivarát is (második kezelés). Hat nőstény és hat hím patkányon végezték el a kísérletet. A következő eredményt kapták:

Ivar	Szalonna Friss	Avas	Összesen
	592	709	
Hím	538	679	
	476	699	
Összesen	1606	2087	3693
	657	508	
Nőstény	594	505	
	677	539	
Összesen	1928	1552	3480
Összesen	3534	3639	7173

Számítás:

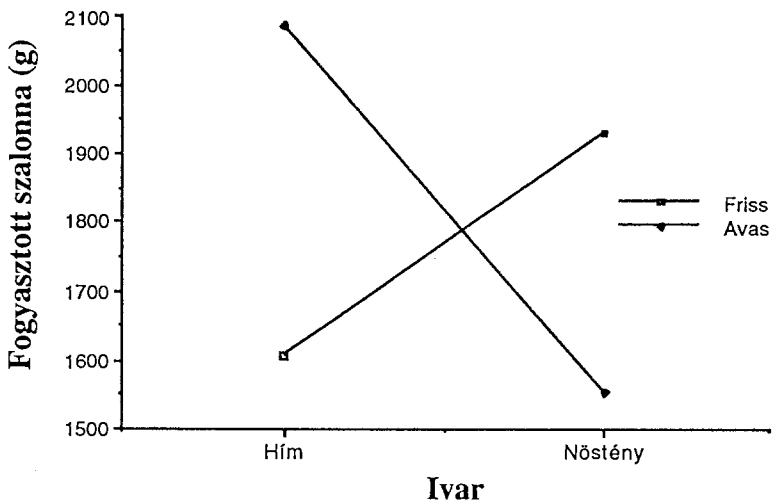
1. $\sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}\sum_{k}^{n} X_{ijk} = 592+538+...+539 = 7173.$
2. $\sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}\sum_{k}^{n} X_{ijk}^2 = (592)^2+(538)^2+...+(539)^2 = 4365231.$
3. $\frac{\sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}\left(\sum_{j}^{n} X_{ij}\right)^2}{n} = \frac{1606^2+2087^2+1928^2+1552^2}{3} = 4353564.3.$
4. $\frac{(\text{1.mennyiség})^2}{r\cdot c\cdot n} = \frac{7173^2}{12} = 4287660.8.$
5. $SS_{ö} = 4365231-4287660.8 = 77570.3.$
6. $SS_{k} = 4353564.3-4287660.8 = 65903.6.$
7. $SS_{b} = 77570.3-65903.6 = 11666.7.$
8. $\frac{\sum_{i}^{r}\left(\sum_{j}^{c}\sum_{k}^{n} X_{ijk}\right)^2}{c\cdot n} = \frac{3693^2+3480^2}{6} = 4291441.5.$
9. $\frac{\sum_{j}^{c}\left(\sum_{i}^{r}\sum_{k}^{n} X_{ijk}\right)^2}{r\cdot n} = \frac{3534^2+3639^2}{6} = 4288579.5.$
10. $SSr = 4291441.5-4287660.8 = 3780.8.$
11. $SSc = 4288579.5-4287660.8 = 918.8.$
12. $SSi = 65903.6-3780.8-918.8 = 61204.0.$

Az ANOVA-eredménytáblázat:

Variáció forrása	Szabadsági fok (df)	Eltérés-négyzet-összeg (SS)	Közepes négyzetes-összeg (MS)	F_S
csoportok között	3	65903.6	21967.9	15.064***
ivarok között	1	3780.8	3780.8	2.593^{ns}
táplálék között	1	918.8	918.8	0.630^{ns}
interakció	1	61204.0	61204.0	41.968***
csoporton belül	8	11666.7	1458.33	
összes	11	77570.3		

* $p < 0.05$; ** $p < 0.01$; *** $p < 0.001$; ns $p > 0.05$

Az ANOVA-táblából látható, hogy a csoportok különböznek egymástól, hiszen a csoportok közti MS szignifikáns. Ezt a különbséget nem magyarázza külön-külön egyik kezelés sem. Ezzel szemben a két kezelés közötti interakció szintén szignifikáns. Hogyan értelmezhetjük ezt az eredményt ? Ábrázoljuk a csoportösszegek közötti relációt (4.1. ábra).



4.1 ábra A különböző ivarú patkányok által fogyasztott friss és avas szalonna mennyisége.

Látható, hogy a hímek az avas szalonnából fogyasztottak többet, míg a nőstények a frisset részesítették előnyben, vagyis az ivar megváltozásával megfordult a reláció iránya. Pontosan ez az, amit a szignifikáns interakció takar.

4.6. A varianciaanalízis feltételei

4.6.1. Random mintavétel

A varianciaanalízis alapvető feltétele: Az egyes kezelések random hozzárendelését jelenti az alanyokhoz (ld. 2.2.2. fejezet). Ha a mintavétel nem random, akkor a kísérlet bármely eredménye megkérdőjelezhető.

4.6.2. Függetlenség

Az egyes mintaelemek egymástól függetlenek legyenek, ne befolyásolja az egyik elem értéke a másikét. Lássunk a feltétel nem teljesülésére egy példát: mezőgazdasági parcellákat többféle gyomirtóval kezelik. Ha egy kezelés parcellái egymás mellett vannak, akkor a függetlenség feltétele nem teljesül, mivel az egymás melletti parcellák jobban hasonlítanak egymásra, mint a távolabb lévőkre. A függetlenség a random előfordulási-próbával tesztelhető (ld. 5.6. fejezet).

4.6.3. Normalitás

A csoportokon belül a vizsgált változó nomális eloszlású. G- illetve Kolmogorov-Szmirnov-próbával ellenőrizhető a változó normális eloszlása (ld. 5.5. fejezet). Ha a csoportonkénti minta elemszám ötnél kisebb, akkor kiszámítjuk az x_{ij}- $\overline{X}_i$ különbségeket, majd ezek normális eloszlását teszteljük úgy, hogy a csoportokat összevonjuk. Megjegyezzük, amíg az eloszlás kissé tér el a szimmetrikustól és nem két vagy több csúcsú, addig a variancianalízis nem nagyon érzékeny a normalitási feltétel nem teljesülésére, különösen, ha a csoportok elemszáma azonos.

4.6.4. Varianciák homogenitása

Láttuk, hogy a csoporton belüli varianciát a csoportok varianciáinak súlyozott átlagával becsültük. A pontos becslés alapvető feltétele, hogy a csoportok varianciái ugyanazt a varianciát becsüljék, más szóval a varianciák homogének legyenek. A homogenitás másképpen úgy is megfogalmazható, hogy az átlagok és a varianciák között ne legyen összefüggés. A homogenitás különféle próbákkal tesztelhető.

4.6.4.1. F_{max}-próba

Alkalmazható, ha a mintanagyságok nem térnek el jelentősen (köztük a különbség nem nagyobb, mint 2-3) és ha a változó eloszlása közel normális. Vesszük a legnagyobb és a legkisebb csoportvariancia hányadosát:

$$F_{max} = \frac{s^2_{max}}{s^2_{min}}.$$

A kapott értéket összehasonlítjuk az F_{max}-táblázat kritikus értékével (16. táblázat). Ha a számított érték nagyobb a kritikus értéknél, akkor a szórások homogenitását kimondó nullhipotézisünket elvetjük. A táblázatból a csoportszámhoz és az n-1 szabadsági fokhoz keressük ki az értéket. Ha a mintanagyságok különböznek, akkor n a legkisebb minta elemszámával egyenlő.

4.10. példa . Ellenőrizzük le a 4.5. példa adatainál a varianciák homogenitását.

Minta	df	s^2
Kontroll	4	7.3
Serkentés	4	3.0
Gátlás	4	18.8

Mivel a mintanagyságok egyenlők (n = 5), ezért alkalmazhatjuk az F_{max}-próbát:

$$F_{max} = \frac{18.8}{3.0} = 6.267 < F_{0.05[3,4]} = 15.5$$

A próba alapján a varianciák homogénnek tekinthetők.

4.6.4.2. Bartlett-próba

Különböző mintanagyságok esetén is használhatjuk. A próba nagyon érzékeny a változó normálistól eltérő eloszlására.

Számításmenet:

1. Összegezzük a szabadsági fokokat: $\sum_i^a (n_i - 1)$

2. Kiszámítjuk a súlyozott átlagos varianciát és vesszük a természetes alapú logaritmusát: $s^2 = \frac{\sum_i^a (n_i - 1)s_i^2}{\sum_i^a (n_i - 1)}$, $\ln s^2$.

3. $\sum_i^a (n_i - 1) \cdot \ln s_i^2$

4. $\chi 2$ = (1.mennyiség)(2.mennyiség)-(3.mennyiség)

5. Korrekciós tényező: $C = 1 + \frac{1}{3(a-1)} \left[\sum_i^a \frac{1}{(n_i - 1)} - \frac{1}{\sum_i^a (n_i - 1)} \right]$

6. $\chi_C^2 = \frac{\chi^2}{C}$

A χ_C^2 mennyiség $\chi 2$-eloszlást követ df = a-1 szabadsági fokkal. Ha a számított érték nagyobb, mint a táblázatbeli (11. táblázat), akkor elvethetjük a szórások egyenlőségét állító nullhipotézist.

4.11. példa . Ellenőrizzük le a 4.5. példa adatainál a varianciák homogenitását.

Minta	df	s^2
Kontroll	4	7.3
Serkentés	4	3.0
Gátlás	4	18.8

Számításmenet:

1. Összegezzük a szabadsági fokokat: $\sum_i^a (n_i - 1) = 12$

2. Kiszámítjuk a súlyozott átlagos varianciát és vesszük a logaritmusát: $s^2 = \frac{\sum_i^a (n_i - 1)s_i^2}{\sum_i^a (n_i - 1)} = 9.7$, $\ln s^2 = 2.27$

3. $\sum_i^a (n_i - 1) \cdot \ln s_i^2 = 24.08$

4. $\chi 2$ = (1.mennyiség)(2.mennyiség)-(3.mennyiség) = 3.16

5. Korrekciós tényező: $C = 1 + \frac{1}{3(a-1)}\left[\sum_i^a \frac{1}{(n_i - 1)} - \frac{1}{\sum_i^a (n_i - 1)}\right] = 1.111$

6. $\chi_C^2 = \frac{\chi^2}{C} = 2.84$

A számított értékünk kisebb mint a kritikus érték (χ_2^2 = 5.991), így a varianciákat homogénnek tekinthetjük.

4.7. Transzformációk

Mit tegyünk, ha adatainkra nem teljesül a varianciaanalízis egy vagy több feltétele ? Az egyik lehetőség, hogy más próbát választunk, pl. Kruskal-Wallis-próbát (ld. 5.2.2. fejezet). A másik mód, hogy az adatokon transzformációt hajtunk végre. A transzformációkkal általában segíthetünk a változó nem normális eloszlásán és a varianciák heterogenitását is megszüntethetjük.

Sokan gyanakvók a transzformációk iránt, mivel adatmanipulációnak tartják azokat. Ilyesmiről azonban nincsen szó. Transzformációval nem az adatokat manipuláljuk, hanem skálát váltunk. Néhány szabályt azonban be kell tartani. Nem szabad egy transzformált adatsort továbbtranszformálni. A transzformálás tényét a transzformálás típusával együtt mindig fel kell tüntetni. Ha egy változót szükséges transzformálni, akkor az átlagát és szórását általában a transzformált adatokból számított átlag és szórás visszatranszformálásával közöljük.

4.7.1. Logaritmikus transzformáció

Általában szorzódó hatások esetén használjuk pl. növekedési adatok esetében. Stabilizálja a varianciát és sokszor normalizálja az eloszlást is.

Elvégzése:

$x_i' = \log(x_i)$.

Ha adataink nullát is tartalmaznak (mivel a log(0) művelet nem értelmezhető):

$x_i' = \log(x_i+1)$.

Bármilyen alapú logaritmust használhatunk, rendszerint ln-t és $\log_{10}$-t alkalmazznak.

4.7.2. Négyzetgyök-transzformáció

Gyakorisági adatok esetén nyújt segítséget pl. levéltetvek száma levelenként.

Elvégzése:

$x_i' = \sqrt{x_i + 0.5}$.

4.7.3. Arcussinus-transzformáció

Százalékban vagy arányokban kifejezett adatok esetén hasznos. Az alkalmazás mögött az rejlik, hogy pl. a százalékos adatok nem lehetnek száznál nagyobbak, így egy 90 %-os átlagú mintában az eloszlás biztosan erősen aszimmetrikus.

Elvégzése:

$p_i' = \arcsin\sqrt{p_i}$, ahol p_i = százalékos adatok / 100.

Ha a százalékos adataink nagyrészt 30 és 70 % közé esnek, általában nem szükséges ez a transzformáció.

4.8. Regresszióanalízis

4.8.1. Bevezetés

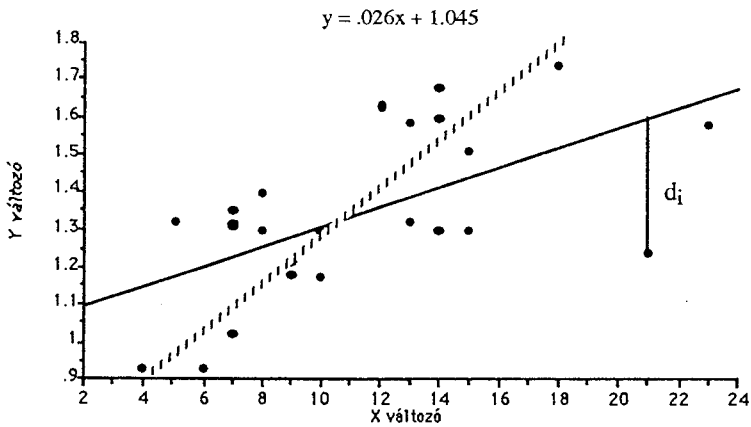
A biológiai kutatásban gyakori, hogy egy mintavételi egységen (pl. patkányon) két változót (pl. kapott gyógyszer dózisát, vörösvértest számot) mérünk egyszerre. Ilyen esetekben érdekelhet bennünket a két változó közötti kapcsolat. Két kérdést tehetünk fel: 1, Az egyik változó változásával a másik milyen irányban és mennyit változik ? 2, A két változó között milyen irányú és szorosságú kapcsolat áll fenn ? Az első kérdésre a regresszióanalízis, a másodikra a korrelációszámítás válaszol. Elsőként a regresszióanalízist tárgyaljuk, melynek eredményeképpen a két változó közötti kapcsolatot leíró függvényt kapunk.

Milyen célokat szolgál a függvénykapcsolat keresése ? Egy ilyen kapcsolat megléte valószínűsíti az ok-okozati viszony létét, de nem bizonyítja. Populációk összehasonlításakor a leírt függvények paramétereinek (pl. az egyenes meredeksége) vizsgálata segítheti a populációk pontosabb elkülönítését (pl. ugyanúgy reagál-e két patkánypopuláció egy méreg koncentrációjának emelkedésére). A függvénykapcsolatokkal bizonyos tapasztalati törvényeket írhatunk le, amelyeket predikciós célokra használhatunk fel. Lényeges megemlíteni, hogy a kapott regressziós egyenes csak a vizsgált tartományon (X_{max} - X_{min}) belül érvényes, azon túl nem alkalmazható predikciós célokra. Fontos területe a regresszióanalízis felhasználásának az ún. statisztikai kontroll, amikor regresszióanalízissel korrigálunk olyan hatásokat (pl. időjárás), amelyek egyébként nem állnak ellenőrzésünk alatt.

A legegyszerűbb függvénykapcsolat két változó között a lineáris kapcsolat:

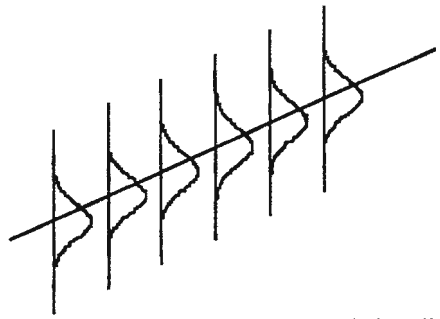
$$Y = a + bX.$$

ahol az Y a függő, X a független változó, b az egyenes meredeksége és a tengelymetszet.



4.4. ábra Két változó közötti függvénykapcsolat. A folytonos vonal a regresszióanalízissel kapott egyenes képe, míg a szaggatott vonalat a szerző szemre húzta be. Felül a regressziós egyenes egyenlete látható.

A lineáris regresszióanalízis során a feladat megtalálni azt az egyenest, amely a legjobban illeszkedik a két változó értékeit mutató ponthalmazra. Az emberi szem nagy biztonsággal képes elvégezni ilyen feladatokat, de a vizuális illesztés szubjektív hibára ad lehetőséget (4.4. ábra). Az ún. legkisebb négyzetek elvének alkalmazásával elkerülhetjük a szubjektivitást. E módszer során keressük azt az egyenest, amelytől az adatpontok Y irányú távolsága (d_i) négyzetének összege ($\sum d_i^2$) minimális (4.4. ábra). A feladat meghatározni ezen egyenes meredekségét (b) és az Y-tengellyel való metszéspontját (a).



4.5. ábra A függő változó (Y) eloszlása X különböző értékei mellett. A regresszióanalízis feltétele, hogy ezen eloszlások normálisak legyenek és szórásaik megegyezenek.

4.8.2. A regresszióanalízis feltételei

1. A függő változó (Y) bármely x_i értékre nézve normális eloszlású és a szórások ezen x_i értékekre nézve homogének (4.5. ábra).

2. A független változó (X) rögzített és a kísérletező kontrollja alatt áll. Ez azt jelenti, hogy X nem véletlen változó.

Ez utóbbi feltételt a biológiában sokszor figyelmen kívül hagyják pl. amikor két testméret közötti regressziót vizsgálnak, és a kapott egyenest az egyik testméret jóslására akarják használni. Itt mindkét változó véletlen változó, vagyis szigorúan véve a regresszióanalízis feltételei nem teljesülnek. Mivel azonban nincs jobb módszer, és a regresszióanalízis már annyira bevett az ilyen problémák megoldására, ezt használják.

4.8.3. Számításmenet

Regressziós koefficiens azaz az egyenes meredeksége (b):

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\left(\sum x_i\right)\cdot\left(\sum y_i\right)}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)}{n}} = \frac{SS_{XY}}{SS_X}.$$

Az Y-tengellyel való metszéspontot (a) a következőképpen állapíthatjuk meg:

$a = \overline{Y} - b \cdot \overline{X}$,

mivel a regressziós egyenes mindig átmegy az $(\overline{X}, \overline{Y})$ ponton.

4.8.4. Szignifikancia-vizsgálat

A regressziós egyenessel kapcsolatban két kérdés szokott felmerülni: (i) mennyire megbízhatóan magyarázza az egyenes az adatok varianciáját, vagyis mennyire szoros a két változó közötti kapcsolat, (ii) eltér-e az egyenes meredeksége nullától ?

Az első kérdésre varianciaanalízissel adhatjuk meg a választ. A függő változó varianciáját felbonthatjuk az egyenes által becsült érték (y') és a változó átlaga ($\bar{Y}$) közötti különbségre (ez az egyenes által magyarázott variancia), valamint a becsült érték és a tényleges y_i közötti különbségre (ez a véletlen okozta hiba). Az előbbi varianciát az utóbbival szemben tesztelve megállapíthatjuk, vajon az egyenes által magyarázott varianciarész szignifikáns-e a véletlennek tulajdonítható variációrészhez képest.

Számítás

1. Magyarázott eltérésnégyzet-összeg:

$$SS_{Y'} = \frac{SS_{XY}^2}{SS_X}.$$

2. Maradék (nem magyarázott) eltérésnégyzet-összeg: $SS_E = SS_y - SS_{Y'}$,

$$SS_Y = \sum y_i^2 - \frac{\left(\sum y_i\right)^2}{n}$$

$$SS_X = \sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}$$

Az ANOVA tábla:

Variáció forrása	Szabadsági fok (df)	Eltérés-négyzet-összeg (SS)	Közepes négyzetes-összeg (MS)	F_S
az egyenes által magyarázott	1	$SS_{Y'}$	$MS_{Y'} = SS_{Y'}/df$	$MS_{Y'}/MS_E$
maradék	n-2	SS_E	$MS_E = SS_E/df$	
összes	n-1	SS_Y		

Ha F_S nagyobb mint a kritikus érték, akkor a regressziós egyenes az Y változó varianciájának szignifikáns részét magyarázza, vagyis van kapcsolat a két változó között.

Az egyenes meredekségének nullától való eltérése a következő módon tesztelhető:

1. $S_{YX}^2 = \frac{SS_E}{n-2}$

2. $S_b = \sqrt{\frac{S_{YX}^2}{SS_X}}$

3. $t_S = \frac{b}{S_b}$,

ahol t_S t-eloszlást követ n-2 szabadsági fokkal. Ha t_S nagyobb, mint a táblázatbeli t-érték (4. táblázat), akkor a számított egyenesünk meredeksége szignifikánsan eltér nullától, vagyis az egyenes nem vízszintes.

4.12. példa. Lisztbogarak szárazsághoz alkalmazkodását vizsgálták a következő kísérletben: a bogarakat hat napig éheztették különböző páratartalmú környezetben és mérték a súlycsökkenésüket. A kapott eredmények:

Relatív páratartalom [%] (X)	Súlyveszteség [mg] (Y)	X^2	Y^2	XY
0.0	8.98	0.00	80.640	0.000
12.0	8.14	144.00	66.260	97.680
29.5	6.67	870.25	44.489	196.765
43.0	6.08	1849.00	36.966	261.440
53.0	5.90	2809.00	34.810	312.700
62.5	5.83	3906.25	33.989	364.375
75.5	4.68	5700.25	21.902	353.340
85.0	4.20	7225.00	17.640	357.000
93.0	3.72	8649.00	13.838	345.960
453.5	54.20	31152.75	350.535	2289.260

$\overline{X} = 50.389, \qquad \overline{Y} = 6.022$

Az egyenes meredeksége:

$$b = \frac{2289.26 - \frac{453.5 \cdot 54.20}{9}}{31152.75 - \frac{453.5^2}{9}} = \frac{-441.818}{8301.389} = -0.053 \text{ mg/rel \%.}$$

Tengelymetszet:
a = 6.022-(-0.053)(50.389) = 8.693.

Magyarázott variáció:

$$SS_{Y'} = \frac{(-441.818)^2}{8301.389} = 23.515$$

Maradék:

$$SS_Y = 350.535 - \frac{(54.20)^2}{9} = 24.131$$

SS_E = 24.131-23.515 = 0.616.

Az ANOVA tábla:

Variáció forrása	Szabadsági fok (df)	Eltérés-négyzet-összeg (SS)	Közepes négyzetes-összeg (MS)	F_S
magyarázott	1	23.515	23.515	267.216***
maradék	7	0.616	0.088	
összes	8	24.131		

*** $p < 0.001$;

Látható, hogy X változása szignifikáns részt magyaráz Y varianciájából.

A meredekség tesztelése:

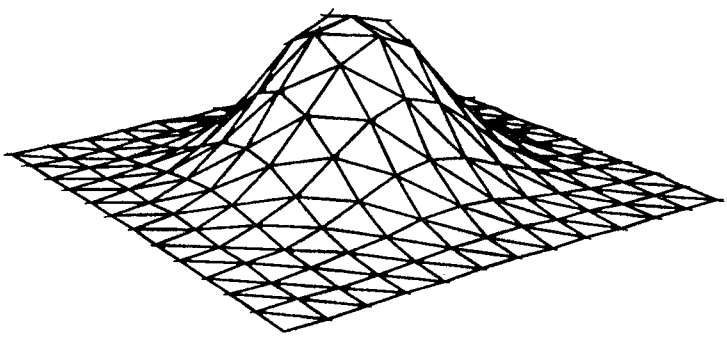
$$s_{YX}^2 = \frac{0.616}{7} = 0.088$$

$$s_b = \sqrt{\frac{0.088}{8301.389}} = 0.00325$$

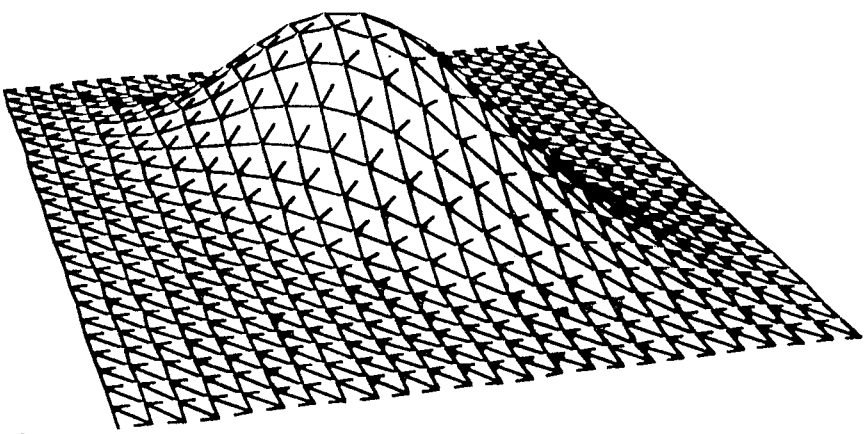
$$t_s = \frac{-0.053}{0.00325} = -16.307, \qquad df = 9\text{-}2 = 7.$$

Mivel a kritikus érték ennél a szabadsági foknál még $p < 0.001$-nél is kisebb, állíthatjuk, hogy egyenesünk meredeksége szignifikánsan eltér nullától.

a,



b,



4.6. ábra Kétdimenziós normál eloszlás képe. a, a változók függetlenek; b, a változók korrelálnak (r = 0.7).

4.9. Korrelációanalízis

4.9.1. Bevezetés

A korrelációanalízis során azt vizsgáljuk, hogy két változó függ-e egymástól. Eltérően a regresszióanalízistől, nem tételezünk fel köztük ok-okozati viszonyt és függvénykapcsolatot. Egyszerűen azt vizsgáljuk, hogy van-e a két változó között függő viszony. Ha a két változó nem független, akkor az egyik ismeretében jóslásokat tehetünk a másikra. A változók közötti viszony egyenrangú, nem különböztetünk meg függő és független változót.

A korrelációanalízis feltétele, hogy a két változó együttes eloszlása kétdimenziós normál eloszlás legyen. Ha a két változó független egymástól, akkor a kétdimenziós normál eloszlás képe harang alakú (4.6a ábra). Amennyiben kapcsolat van köztük, akkor az eloszlás képe torzul, elnyúlt taraj alakúvá válik (4.6b ábra). A taraj annál élesebb, minél erősebb a függő viszony a két változó között. A kapcsolat erősségének a mérésére szolgál az ún. Pearson-féle korrelációs együttható (r). Értéke -1 és +1 között változhat. Nulla érték a két változó közötti kapcsolat hiányát, míg -1 ill. +1 a teljes meghatározottságott jelzi. Az előjel a kapcsolat irányát mutatja: pozítiv együttható esetén az egyik változó növekedésével nő a másik változó, míg negatív előjelnél az egyik változó növekedésével a másik csökken. A korrelációs együttható négyzete (r^2) a determinációs együttható, ami megadja, hogy az egyik változó változása milyen arányban magyarázza a másik variációját. Minél inkább közelít egyhez a determinációs együttható értéke annál szorosabb a kapcsolat a változók között.

A korrelációanalízis kiválóan alkalmas olyan esetekben, amikor a regresszióanalízis nem megfelelő, pl. két testméret közötti összefüggés vizsgálatakor. Ilyen problémák elemzésekor -- vagyis mikor mindkét változó véletlen változó -- mindig korrelációanalízist használjunk, hacsak nem célunk a regressziós egyenlet további alkalmazása (pl. predikciók megtételére).

4.9.2. Számításmenet

Legyen x_1 az első változó valamely eleme, x_2 a második változó valamely eleme és n az adatpárok száma.

Lépések:

1. Az első változó elemeinek összege: $\sum x_1$.
2. Az első változó elemei négyzetének összege: $\sum x_1^2$
3. A második változó elemeinek összege: $\sum x_2$.
4. A második változó elemei négyzetének összege: $\sum x_2^2$
5. A két változó elemei szorzatának összege: $\sum x_1 x_2$.
6. Az első változó eltérésnégyzet-összege:

$$SS_1 = \sum x_1^2 - \frac{\left(\sum x_1\right)^2}{n} = (2.\,mennyiség) - \frac{(1.\,mennyiség)^2}{n}$$

7. A második változó eltérésnégyzet-összege:

$$SS_2 = \sum x_2^2 - \frac{\left(\sum x_2\right)^2}{n} = (4.mennyiség) - \frac{(3.mennyiség)^2}{n}$$

8. Az eltérésszorzatok összege:

$$SS_{12} = \sum x_1^2 x_2^2 - \frac{\left(\sum x_1\right)\cdot\left(\sum x_2\right)}{n} = (5.mennyiség) - \frac{(1.mennyiség)\cdot(3.mennyiség)}{n}$$

9. A korrelációs koefficiens:

$$r_{12} = \frac{(8.mennyiség)}{\sqrt{(6.mennyiség)\cdot(7.mennyiség)}}$$

4.9.3. A korrelációs koefficiens próbája

A próba során a következő nullhipotézist H_0: r = 0, a H_1: r ≠ 0 alternativ hipotézissel szemben tesztelve, vizsgáljuk, hogy van-e tényleges kapcsolat a változók között.

Számítás:

$$A\ t_S = r\cdot\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

próbastatisztika t-eloszlást követ n-2 szabadsági fokkal. Ha a számított értékünk abszolut értéke kisebb a kritikus értéknél, akkor a nullhipotézist megtartjuk, mivel a változóink között valószínüleg nincs kapcsolat, ellenkező esetben a nullhipotézist elvetve a változók kapcsolatát állapítjuk meg.

4.13. példa. A füsti fecskék vonulását vizsgálva a kutatók vizsgálták, van-e összefüggés a tavaszi visszatérés ideje és a madár kondíciója között. A visszatérési időt az április elseje óta eltelt napok számával, a kondíciót a madár súlyával jellemezték:

Egyed	Visszatérés [nap]	Súly [g]
1	13	19.1
2	13	21.6
3	11	20.5
4	9	24.3
5	15	18.2
6	16	19.2
7	10	19.9
8	22	17.2
S x	109	160.0
S x^2	1605	3233.84

$\sum x_1 = 13+13+...+22 = 109.$

$\sum x_1^2 = 13^2+13^2+...+22^2 = 1605.$

$\sum x_2 = 19.1+21.6+...+17.2 = 160.0.$

$\sum x_2^2 = (19.1)^2+(21.6)^2+...+(17.2)^2 = 3233.84.$

$\sum x_1x_2 = (13\cdot 19.1)+(13\cdot 21.6)+...(22\cdot 17.2) = 2130.9.$

$$SS_1 = 1605 - \frac{109^2}{8} = 119.875.$$

$$SS_2 = 3233.84 - \frac{(160.0)^2}{8} = 33.840.$$

$$SS_{12} = 2130.9 - \frac{109 \cdot 160.0}{8} = -49.100.$$

$$r_{12} = \frac{-49.100}{\sqrt{119.875 \cdot 33.840}} = -0.7709.$$

$$t_S = -0.7709\sqrt{\frac{8-2}{1-0.7709^2}} = -2.964, \qquad df = 6.$$

Mivel a $t_{0.05[6]} = 2.447 < |t_S = -2.964|$ ezért a nullhipotézist elvethetjük, vagyis a két változó között szignifikáns kapcsolat van. A korrelációs koefficiens vizsgálatából levonhatjuk azt a következtetést, hogy minél nagyobbak a madarak, annál korábban érkeznek (negatív előjel).

4.10. A kovariancia-analízisről

Kisérleteket, megfigyeléseket végezve kerülhetünk olyan helyzetbe, hogy két változó között kapcsolatot tapasztalunk. Egyedül az Y-ra végzett ANOVA nem mutat szignifikáns különbséget a kezelések között. Feltételezhető, hogy az Y kapcsolatban van az X tényezővel és ez utóbbi módosíthatja az előbbit. A korreláló tényező hatásának vizsgálatát és kikapcsolását kovariancia-analízissel végezhetjük. Alkalmazásához feltételezzük, hogy az X és Y közötti összefüggés lineáris a mintákon belül, valamint a regressziós egyenes meredeksége és a kapcsolat szorossága megegyezik a minták között. Ezeket a feltételeket szakmai ismereteink alapján feltételezhetjük. A legfontosabb szakmai feltétel: a független változó (X) semmiféle összefüggésben ne legyen a kezeléssel.

A kovariancia-analízis egyik hasznos alkalmazási területe: kvantitatív változók közötti összefüggés vizsgálatánál a kvalitatív változók hatását akarjuk kiszűrni.

4.10.1. Számításmenet

Külön ANOVA-t végzünk az X-re, az Y-ra és az XY-ra. XY esetén a következőképpen járunk el: Kiszámítjuk az SS_{XY} értékeket (lásd Regresszióanalízis, 4.8.) külön-külön a csoportokra. Ezek összege adja az alábbi táblázat C' értékét. C"-t megkapjuk, ha az SS_{XY} értéket az összes esetre számítjuk ki. C = C" - C'. Az összevont ANOVA tábla teljesen véletlen elrendezés, p kezelés és q ismétlés esetén (n = pq):

Variáció forrása	X	XY	Y	df
csoportok között	A	C	B	p - 1
csoportokon belül	A'	C'	B'	n - p
összes	A''	C''	B''	n - 1

Ha az adatokban a "kezelés" különbségeknek köszönhetően heterogenitást tapasztalunk, akkor az Y-nak az X-re vonatkozó regressziójának becslése b' = C' / A', amit nem

befolyásolnak a kezelések közötti differenciák. Először megvizsgáljuk, hogy a b' szignifikáns-e (ha nem, akkor nincs értelme folytatni a kovariancia analízist):

$$F_s = \frac{C'^2/A'}{\frac{B' - C'^2/A'}{n-p-1}}$$

ahol df = 1 a számlálóra és df = n - p - 1 a nevezőre.

Ha F_S szignifikáns akkor folytatjuk az eljárást, mellyel az Y "kezelés" átlagokat a b' irányhatározójú regressziós egyenessel párhuzamosan eltoljuk amíg mind meg nem felel ugyanannak az X-nek. A "kezelés" átlagokat korrigáljuk az X-re a regresszió alapján, mert így összehasonlíthatók egymással, ui. az X változó variabilitását kiküszöböltük. Most szükségünk van a módosított (korrigált) "kezelések" és a maradék ("hiba") F-próbájára, hogy megállapítsuk most van-e szignifikáns eltérés a "kezelések" következtében. Ezt az un. "maradék (rezidum) varianciaanalízissel" végezhetjük el:

Variáció forrása	SS	MS	df	F_S
különbség kezeléseken belül	$SS_k = SS_ö - SS_b$ $SS_b = B' - C'^2 / A'$	$MS_k = SS_k / df$ $MS_b = SS_b / df$	p - 1 n - p - 1	MS_k / MS_b
összes	$SS_ö = B'' - C''^2 / A''$			

Ha az F_S szignifikáns akkor a korrigált "kezelésátlagokat" vetjük össze. Az Y középértékek korrekciója: $\overline{Y}' = \overline{Y} - b'\left(\overline{X} - \overline{\overline{X}}\right)$ ahol $\overline{\overline{X}} = \frac{\sum X}{n}$ (az un. főátlag).

4.14. példa. Egy búzatáblában május, június és július hónapokban havonta 8 db 400 cm^2 -es négyzetben levágták a búzát és feljegyezték a tőszámát. A tömeget g/4 dm^2 szárazanyagra adták meg. A kutatók vizsgálták vajon különbözik-e egységnyi területen a búza tömege a különböző hónapokban. A tömeg varianciaanalízise előtt megvizsgálták van-e összefüggés a középértékek és a hozzájuk tartozó szórás között. Mivel találtak közöttük összefüggést, a szórás stabilizálására a tömeg adatok lg transzformáltját alkalmazták a további analízisekben.

Az adatok:

Hónapok	május		június		július	
ismétlés	X = tőszám	Y = lg(súly)	X	Y	X	Y
1	21	2.428	23	2.831	14	1.997
2	10	1.263	14	1.846	13	1.802
3	13	1.710	7	0.957	8	1.016
4	9	1.169	12	1.778	8	1.116
5	7	0.811	15	1.946	15	1.929
6	9	1.204	10	1.244	7	1.034
7	4	0.320	14	1.941	7	1.066
8	6	0.519	18	2.688	5	0.740
átlag	9.88	1.178	14.12	1.904	9.62	1.338
szórás	5.249	0.672	4.883	0.636	3.777	0.489

A variancia és kovariancia analízis:

Variáció forrása	X	XY	Y	df
hónapok	102.333	14.860	2.328	2
maradék	459.625	58.044	7.663	21
összes	561.958	72.904	9.992	23

A tömegadatokra elvégzett ANOVA nem adott szignifikáns eredményt ($F_S = 3.19$, $p > 0.05$), vagyis az egyszerű varianciaanalízissel nem tudtunk a hónapok között különbséget kimutatni. A tőszámnak azonban szignifikáns hatása volt a tömegre ($b' = 0.126$, $F_S = 440.24$), így kovarianciaanalízissel probálkozunk tovább. A maradék varianciaanalízise:

Variáció forrása	SS	df	MS	F_S
különbség (hónapok)	0.201	2	0.101	6.07**
hónapokon belül	0.333	20	0.017	
összes	0.534	22		

A tőszám hatásának eltávolítása után a hónapok között szignifikáns különbség mutatható ki.

A tömegértékek korrekciója:

Hónap	$\overline{X}$	$\overline{X}-\overline{\overline{X}}$	$b'\left(\overline{X}-\overline{\overline{X}}\right)$	$\overline{Y}$	$\overline{Y}-b'\left(\overline{X}-\overline{\overline{X}}\right)$
május	9.88	-1.33	-0.168	1.178	1.346
június	14.12	2.92	0.368	1.904	1.536
július	9.62	-1.58	-0.199	1.338	1.537
összes	11.21			1.473	1.473

Az eredeti (a) és a kovarianciaanalízissel korrigált (b) tömegátlagok (a logaritmusok visszaszámolva):

Hónap	g / 4 dm^2 (a)	g / 4 dm^2 (b)
május	15.07	22.18
június	80.17	34.36
július	21.78	34.43

Jól látható, hogy a tőszámra korrigált átlagok esetében egy növekvő trendet találunk, amelyet a tőszám zavaró hatása elfedett az eredeti adatok esetében.

4.11. Többszörös regresszióanalízis

A többszörös regresszióanalízist akkor használjuk, ha egy függő (Y) változó variációját vizsgáljuk több független változó (X_i) fügvényeként. Az analízis céljai a következők lehetnek: (1) Egy nagy prediktív erejű lineáris egyenletet szeretnénk felírni, amely pontosabban jósolja Y változását, mintha a független változók hatását egyenként vizsgálnánk. (2) Tudni szeretnénk,

hogy a vizsgált független változók közül melyiknek van a legnagyobb hatása a függő változóra. (3) Többszörös regresszióanalízissel lehetőség van rá, hogy a függő változó varianciáját csökkentsük, így a számunkra lényeges hatásokat pontosabban tudjuk vizsgálni.

4.11.1. Számításmenet

A többszörös regressziós egyenletet általános alakban így írhatjuk fel:

$$Y = a + b_{Y1}X_1 + b_{Y2}X_2 + ... + b_{Yk}X_k$$

ahol az X_j - k független változók, a b_{Yj} a parciális regressziós együttható az Y és X_j között, ha a többi független változó konstans. Az együttható Y változását adja meg egységnyi X_j-re vonatkoztatva, ha a többi változó állandó.

Az előbbi egyenlet együtthatóit a következő egyenlet rendszert megoldva kaphatjuk meg:

$$SS_1^2 b_{Y1.} + SS_{12} b_{Y2.} + ... + SS_{1k} b_{Yk.} = SS_{1Y}$$
$$SS_{12} b_{Y1.} + SS_2^2 b_{Y2.} + ... + SS_{2k} b_{Yk.} = SS_{2Y}$$
$$\vdots$$
$$SS_{1k} b_{Y1.} + SS_{2k} b_{Y2.} + ... + SS_k^2 b_{Yk.} = SS_{kY}$$

ahol $SS_i^2 = \sum (X_i - \overline{X}_i)^2$ vagyis az X_i változó eltérésnégyzetösszege, és $SS_{ij} = \sum (X_i - \overline{X}_i)(X_j - \overline{X}_j)$ vagyis az X_i és X_j közötti eltérésszorzatösszege. Mivel k ismeretlenünk és k egyenletünk van, az egyenletrendszer megoldható bármely ismert technikával pl mátrix műveleteket használva. A többszörös regressziós egyenlet konstansát (a-t) így kaphatjuk meg:

$$a = \overline{Y} - b_{Y1.}\overline{X}_1 - b_{Y2.}\overline{X}_2 - ... - b_{Yk.}\overline{X}_k$$

A számítások alapján rendelkezésünkre áll az Y változását leíró egyenlet. Ez után tudni szeretnénk, hogy az egyes független változók milyen mértékben hatnak a vizsgált függő változóra. Melyik X_i változása eredményezi a legnagyobb változást Y-ban ? Erre a célra a parciális regressziós koefficiensek nem alkalmasak, mivel értékük nagy mértékben függ a használt mértékegységtől, továbbá az egyes változókat nem azonos skálán mértük. A feladatot a standardizált parciális regressziós koefficiens vagy β-együttható ($b'_{Yi.}$) használatával oldhatjuk meg. Ehhez az adott X_i változó szórását használják egységként és erre vonatkoztatják Y változását szintén Y szórásában kifejezve. Kiszámítása:

$$b'_{Yi.} = b_{Yi.} \frac{S_{X_i}}{S_Y}$$

Az így kapott β-együtthatókat összehasonlítva már megadhatunk a független változók között egy sorrendet: a legnagyobb β-együtthatójú X_i változó befolyásolja leginkább Y változását.

Az egyenlet kiszámítása és a független változók "fontosságának" megállapítása után felmerül a kérdés: mennyire megbízhatóak az eredményeink ? Nem csak a mérési hiba okozta-e a tapasztalt regressziós kapcsolatot ? E kérdések eldöntése végett először vizsgáljuk, hogy a

kapott egyenlet Y varianciájának hányad részét magyarázza. Ezt a többszörös determinációs koefficiens adja meg:

$$R^2_{Y\cdot 1\ldots k} = r_{1Y}b'_{Y1} + r_{2Y}b'_{Y2} + \ldots + r_{kY}b'_{Yk} \qquad 0 \le R^2_{Y\cdot 1\ldots k} \le 1$$

Ha ez az érték egyhez közeli akkor egyenletünk jól írja le Y változását.

Az egyenlet szignifikancia tesztjét az egyszeres regresszióhoz hasonlóan ANOVA-val végezzük. Ehhez szükség van az egyenlet által magyarázott eltérésnégyzetösszegekre (SS_E):

$$SS_E = R^2_{Y\cdot 1\ldots k}\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2, \qquad df = k$$

és a nem magyarázott eltérésnégyzetösszegekre:

$$SS_R = \left(1 - R^2_{Y\cdot 1\ldots k}\right)\sum\left(Y - \overline{Y}\right)^2, \qquad df = n - k - 1.$$

Ezekre az eltérésnégyzetösszegekre a szokásos módon felírhatjuk az ANOVA táblát:

Variáció forrása	df	SS	MS	F_S
Az egyenlet által magyarázott	k	SS_E	SS_E / k	MS_E / MS_R
Maradék	n - k - 1	SS_R	$SS_R / (n - k - 1)$	

A kapott F_S értéket hasonlítjuk össze az F-eloszlás táblázatbeli $F_{\alpha[k,\, n-k-1]}$ értékkel (5. táblázat). Ha F_S nagyobb, akkor egyenletünk Y varianciájának szignifikáns részét magyarázza, vagyis nem valószínű, hogy a kapott tendenciák a véletlen hibák eredményei. Ha figyelmesen megvizsgáljuk F_S kiszámítását, láthatjuk, hogy az jelentősen egyszerűsíthető:

$$F_S = \frac{\frac{SS_E}{k}}{\frac{SS_R}{n-k-1}} = \frac{\frac{R^2_{Y\cdot 1\ldots k}\sum\left(Y-\overline{Y}\right)^2}{k}}{\frac{\left(1-R^2_{Y\cdot 1\ldots k}\right)\sum\left(Y-\overline{Y}\right)^2}{n-k-1}} = \frac{\frac{R^2_{Y\cdot 1\ldots k}}{k}}{\frac{\left(1-R^2_{Y\cdot 1\ldots k}\right)}{n-k-1}}$$

Az egyenlet által becsült $\hat{Y}_i$ értékeket rendre kivonva minden egyes Y_i -értékből, kapjuk a dY_i értékeket. A dY változó már független az előző egyenletbeli X_i változóktól. Ezt az un. maradék (residual) analízist használjuk fel pl. ha egy terepkisérlet esetén az időjárás hatását akarjuk eltávolítani az adatainkból, hogy kezelésünk hatását pontosabban értékelhessük.

4.15. példa. A hortobágyi Újszentmargita határában lévő mintaterület Artemisio-Festucetum pseudovinae társulásában a kutatók minden év áprilisában egy 4 dm^2 -es területről levágták a növényzetet öt éven keresztül. A példában az áprilisi mért talajszint felletti élő (zöld) növényi részek adatait használjuk fel, az adatok g szárazanyag / 4 dm^2 -ban vannak megadva. Ezzel egyidőben folyamatosan mérték a léghőmérsékletet (X_1), a csapadék összegét (X_2) és a globális sugárzás mennyiségét (X_3). A kutatók vizsgálták, hogy a biomassza mennyiségére milyen hatással vannak a mért időjárási változók.

Az adatok:

Év	hőmérséklet X_1	csapadék X_2	globális sugárzás X_3	tömeg Y
1967	10.8	24	10.1	5.76
1968	13.1	16	10.8	6.26
1969	10.0	37	10.2	6.56
1970	10.7	70	9.8	4.86
1971	11.6	16	9.9	4.10
összesen	56.2	163	50.8	27.54
átlag	11.24	32.6	10.16	5.508

A parciális együtthatók kiszámításához az egyenletrendszer:

$$5.6120\ b_1 - 58.7200\ b_2 + 1.2686\ b_3 = -0.1736$$
$$-58.7200\ b_1 + 2043.2000\ b_2 - 19.0800\ b_3 = -10.8840$$
$$1.2686\ b_1 - 19.0800\ b_2 + 0.6120\ b_3 = 1.1076$$

$b_1 = -0.7893$
$b_2 = 0.0059$
$b_3 = 3.6281$
$a = -22.6741$

A regressziós egyenlet $\hat{Y} = -22.6741 - 0.7893\ X_1 + 0.0059\ X_2 + 3.6281\ X_3$

Látható, hogy a hőmérséklet növekedése csökkentette a biomassza növekedését, míg a csapadék és a globális besugárzás növelte azt.

Számoljuk ki a standardizált parciális regressziós együtthatókat:

$$b'_{Y1\cdot23} = b_{Y1\cdot23}\frac{S_{X_1}}{S_Y} = -0.7893\frac{1.184}{1.017} = -0.9189$$

$$b'_{Y2\cdot13} = b_{Y2\cdot13}\frac{S_{X_2}}{S_Y} = 0.1304$$

$$b'_{Y3\cdot12} = b_{Y3\cdot12}\frac{S_{X_3}}{S_Y} = 1.3952$$

Összehasonlítva ezeket a koefficienseket, levonhatjuk a következtetést, hogy a globális besugárzásnak volt a legnagyobb hatása a biomassza növekedésére. Úgy tünhet - a standardizált és a nem standardizált koefficienseket összehasonlítva - hogy ezt a következtetést kaptuk volna, ha csak a nem standardizált parciális együtthatókat vizsgáljuk. Ez azonban az esetek többségében nem igaz, ebből a szempontból ez a példa kivétel.

Az egyenlet szignifikancia tesztje:

$$\sum\left(Y - \overline{Y}\right)^2 = S_s(n-1) = 4.068$$

$r_{1Y} = -0.036$
$r_{2Y} = 0.118$
$r_{3Y} = 0.696$
$R^2 = 0.9888$

Vagyis az egyenlet Y varianciájának igen nagy részét magyarázza. Lássuk, hogy szignifikánsnak tekinthető-e ez.

SSE = 4.0222 df = 3
SSR = 0.0457 df = 1

Az ANOVA tábla:

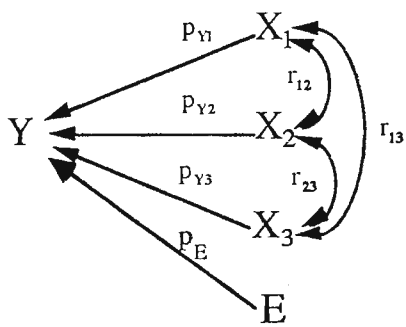
Variáció forrása	df	SS	MS	F_S
Az egyenlet által magyarázott	3	4.0222	1.3407	29.3369^{NS}
Maradék	1	0.0457	0.0457	

NS: nem szignifikáns

A táblából látszik, hogy az egyenlet nem magyarázza Y varianciájának szignifikáns részét, ami a kis mintaelemszámot tekintve nem is meglepő.

4.12. Path-analízis

A több változó közötti kapcsolatok elemzésének, a hatások tanulmányozásának és nagyságuk (relatív) becslésének egyik módja az előbbiekben ismertetett többszörös regresszióanalízis. Egy másik eljárás az un. path-analízis. Ebben az analízisben a függő változót célváltozónak (Y), a független változókat hatóváltozónak (X_i) nevezzük. A cél- illetve hatóváltozók közötti kapcsolatokat, hatásokat az un. path-sémával ábrázolhatjuk. A 4.15. példánál maradva, a biomassza (Y), a hőmérséklet (X1), a csapadék összeg (X2) és a globális besugárzás (X3) közötti kapcsolatokat a következőképpen ábrázolhatjuk:



Ahol p_{Yi} - a path koefficiens - az X_i változó célváltozóra gyakorolt közvetlen hatásának mértéke. Az ábrát a következő feltételezések alapján rajzoltuk meg: a három hatóváltozó közvetlenül hat a célváltozóra és a hatóváltozók nem függetlenek egymástól - közöttük korrelációs kapcsolat van. A direkt hatások (egyirányú nyilak) és a korrelációs kapcsolatok (kétirányú nyilak) között különbség van ui. nem tételezzük fel, hogy p'. a biomassza növekedés visszahat a csapadék mennyiségére. A hatóváltozók által nem magyarázott hatásokat az E, ún. maradék vagy hiba változóval ábrázoljuk. A path-séma felállításában a kutatónak nagy szabadsága van, előző ismereteit nagymértékben hasznosíthatja.

A path-analízis célját a fentiek alapján a következőképpen fogalmazhatjuk meg: a kutató által felvázolt rendszerben az egyes hatótényezőknek ("okoknak") mekkora közvetlen és közvetett hatásuk van a célváltozóra ("okozatra"), feltételezve, hogy a rendszer lineáris és nem irreális. Ez tulajdonképpen a változók közötti korrelációk felbontásának felel meg.

4.12.1. A path-együtthatók kiszámítása

Két path-sémabeli változó között a korrelációs együttható a következőképpen számítható: a két változó közötti összes lehetséges útra összegezzük az egyes utak menti path és korrelációs együtthatók szorzatait. Lehetséges út az, amelyen végig menve csak egy korrelációs

együttható van. Az előbbi path-sémánál maradva Yés X_1 közötti korrelációs együttható (r_{Y1}) egyenlő:

$$r_{Y1} = p_{Y1} + p_{Y2}r_{12} + p_{Y3}r_{13}.$$

Az egyenletben nem szerepel az X1 →X2 → X3 → Y út, mivel itt két korrelációs együttható is van. Ezeket a szabályokat használva felírhatunk egy egyenletrendszert amit megoldva megkapjuk a path-koefficiensek értékeit. Az előbbi path-sémára az egyenletrendszer:

$$r_{Y1} = p_{Y1} + p_{Y2}r_{12} + p_{Y3}r_{13}$$
$$r_{Y2} = p_{Y1}r_{12} + p_{Y2} + p_{Y3}r_{23}$$
$$r_{Y3} = p_{Y1}r_{13} + p_{Y2}r_{23} + p_{Y3}.$$

A path-koefficiens azokra a hatóváltozókra amelyek a célváltozóval közvetlenül kapcsoltak megegyezik a standardizált parciális regressziós koefficiensel.

4.16. példa. A 4.15. példa adatait analízáljuk path-analízissel. A szükséges korrelációs koefficiensek:

$r_{12} =$ -0.5484 $\quad r_{Y1} =$ -0.0360
$r_{13} =$ 0.6842 $\quad r_{Y2} =$ -0.1184
$r_{23} =$ -0.5396 $\quad r_{Y3} =$ 0.6960

A path-együtthatók meghatározásához szükséges egyenletrendszer:

$$-0.0360 = p_{Y1} - 0.5484p_{Y2} + 0.6842p_{Y3}$$
$$-0.1184 = -0.5484p_{Y1} + p_{Y2} - 0.5396p_{Y3}$$
$$0.6960 = 0.6842p_{Y1} - 0.5396p_{Y2} + p_{Y3}.$$

Ezt megoldva:
$p_{Y1} =$ -0.9189
$p_{Y2} =$ 0.1304
$p_{Y3} =$ 1.3952.

A legerősebb közvetlen hatása a globális besugárzásnak van, a hőmérsékletnek negatív közvetlen hatása van, míg a csapadék mennyiségének elhanyagolható a hatása. Az egyes korrelációkat összetevőikre bontva további következtetések vonhatók le. Lássuk például a csapadék és a biomassza közötti összefüggést:

r_{Y2}	=	-0.1184
p_{Y2}	=	0.1304
$r_{12}p_{Y1}$	=	0.5040
$r_{23}p_{Y3}$	=	-0.7528

Látható, hogy a csapadék és a biomassza között a korreláció negatív vagyis a sok eső csökkenti a biomassza növekedést. Felbontva ezt a korrelációt, kiderül, hogy a csapadék közvetlen hatása (p_{Y2}) pozitív - mint az intuitívan várható - és csak a globális besugárzáson keresztül menő path ezt erősen csökkentve ($r_{23}p_{Y3}$) lesz az összes hatás negatív.

Végezetül a path-koefficiens értékeket összehasonlítva a többszörös standardizált parciális regressziós együtthatók értékeivel, láthatjuk, hogy azok megegyeznek.

5. Nem-paraméteres próbák

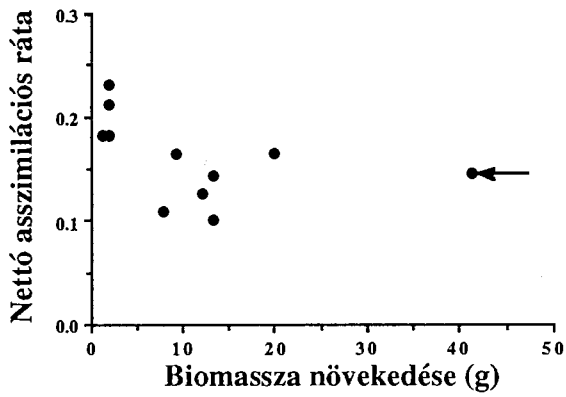
Azon statisztikai eljárásokat, amelyekben a teszt alkalmazása nem függ a változók eloszlásától nem-paraméteres próbáknak nevezik. A nem-paraméteres próbákat két fő csoportba sorolják. A valódi nem-paraméteres próbákban a próbastatisztika számításához nem szükséges a populáció egyetlen paraméterének pl. az átlagnak, varianciának ismerete sem, mivel a próbastatisztika számítása egy eloszlás alapján történik pl. illeszkedésvizsgálat és random előfordulási teszt (5.5. és 5.6). A nem-paraméteres próbák másik csoportját az eloszlásfüggetlen eljárások alkotják. Az utóbbi csoportba tartozó próbák nem követelik meg a változók bizonyos típusú eloszlását, ilyenek pl. a rangok sorrendjén alapuló próbák. Habár az első nem-paraméteres próbát (egy előjelteszt) már az 1700-as évek elején kidolgozták, a nem-paraméteres eljárásokat az 1940-es évekig ritkán alkalmazták. Az utóbbi évtizedekben a nem-paraméteres eljárásokat egyre gyakrabban alkalmazzák a természettudományokban (pl. biológiában, fizikában) és a társadalomtudományokban.

A nem-paraméteres eljárások előnye a paraméteres próbákkal szemben, hogy kevés feltételen alapulnak, így kisebb az esély a hibás felhasználásukra. A próbastatisztikák számítása egyszerű, és a próbák logikáját sok esetben könnyebb megérteni, mint a paraméteres megfelelőjükét. A nem-paraméteres eljárások képesek kis felbontású skálán mért változókat pl. rangon alapuló változókat tesztelni (ld. 3.1. táblázat). Továbbá, a paraméteres eljárásokkal szemben számos nem-paraméteres próba skálaérzéketlen, azaz az adatok transzformálásával nem változik a próbastatisztika értéke. Mivel a próbák egy része rangsoron alapul, a szélsőséges adatok kevésbé módosítják a teszt szignifikancia szintjét mint paraméteres megfelelőjükét (lásd 5.1. példa).

5.1. példa. A nem-paraméteres és paraméteres tesztek érzékenysége szélsőséges adatokra. Az 5.1. ábra adataira kiszámoltuk a Pearson korrelációs koefficienst (paraméteres korreláció) és a Spearman korrelációs koefficienst (nem-paraméteres korreláció), és a koefficiensek szignifikanciaszintjével (p) együtt az alábbi táblázatban tüntettük fel. A felső sorban az összes adatot felhasználtuk (n = 11), míg az alsó sorban a 41.42-t, mint szélsőséges adatot kizártuk. A Spearman próba az összes adatra közel szignifikáns összefüggést mutat p = 0.05 szinten, amit a hibás adat kizárásával megerősítünk. A Pearson korrelációs együttható még a szélsőséges adattal csökkentett adatokkal sem mutatja a negatív kapcsolatot, az összes adatból számolt értékre pedig messze nem szignifikáns kapcsolatot jelez.

	Pearson korreláció		Spearman korreláció	
	r	p	r_S	p
Összes adat	-0.398	0.224	-0.597	0.051
Szélsőséges adat kizárva	-0.597	0.067	-0.644	0.043

A nem-paraméteres eljárások használatát akkor javasolják, ha a tesztelendő hipotézis nem a populáció egy paraméterre vonatkozik. Például, a függetlenség- és homogenitás tesztelésekor (5.4.) nem használjuk fel a populáció egyetlen paraméterét sem pl. átlagát, varianciáját. Nem-paraméteres eljárásokat szükséges akkor is használni, ha a változót intervallumskálánál kisebb pontosságú skálán mértük vagy a változónk eloszlása nem elégíti ki a paraméteres próbák követelményeit. A nem-paraméteres eljárások alkalmazása célszerű, ha az eredményeket gyorsan és egyszerűen szeretnénk kiszámítani.



5.1 ábra. Két pázsitfű (*Echinochloa crus-galli* és *Eleusine indica*) nettó asszimilációs rátája ($g.dm^{-2}.nap^{-1}$) és a biomasszájának növekedése. A szélsőséges adatot nyíl mutatja.

A nem-paraméteres eljárások alkalmazásának legnagyobb hátrányát abban látják, hogy kevesebb statisztikai erővel rendelkeznek, mint a paraméteres megfelelőjük. Ez nem mindig helytálló. A paraméteres próbák normalitási feltételének teljesülése esetén a nem-paraméteres próbák kismértékben ugyan alacsonyabb hatékonyságúak paraméteres megfelelőjüknél (pl. Kruskal-Wallis teszt vs. egyutas ANOVA). Azonban, ha a változó eltér a normál eloszlástól - mint a biológiai adatok túlnyomó többsége, akkor a nem-paramétereres tesztek legalább akkora vagy nagyobb statisztikai erővel rendelkeznek mint paraméteres megfelelőjük. A nem-paraméteres eljárásokról részletes ismertetést Sokal és Rohlf (1981), Daniel (1990) és Potvin és Roff (1993) tartalmaz.

5.1. Előjelteszt

Az előjelteszt a minta lokalizációját tesztelik. Míg a paraméteres próbák a minta elhelyezkedését az átlagok tesztelésével végzik, a nem-paraméteres próbák a mediánt használják. Az előjelteszt egyik csoportja egyetlen minta mediánját hasonlítja össze egy hipotetikus mediánnal (5.1.1. és 5.1.2), míg a másik csoportba tartozó tesztek egymással kapcsolatban álló két minta mediánjának helyzetét tesztelik (5.1.3. és 5.1.4.). Az egymintás előjelteszt az egymintás t-próbával analógok, míg a páros előjelteszt a páros t-próbával.

5.1.1. Egymintás előjelteszt

A legősibb nem-paraméteres eljárás, a binomiális eloszláson alapul (ld. 3.1.2.). Alkalmazásának feltétele, hogy a minta egymástól független és random mérésekből álljon, és a változót (x_1, x_2,.....x_n) legalább ordinális (rangsorrenden alapuló) skálán mérjük.

A teszt nullhipotézise, hogy a minta mediánja megegyezik egy hipotetikus populáció mediánjával, míg az alternatív hipotézis, hogy attól eltér:

H_0: $M = M_0$ és H_1: $M \neq M_0$.

A nullhipotézist az M_0 és a változó mérési értékeinek különbségével teszteljük (x_i-M_0). Ha x_i nagyobb M_0-nál, + előjelü a különbség, míg ha x_i kisebb M_0-nál a különbség negatív előjelű. A próbastatisztika a ritkábban előforduló előjelek száma. Ha a nullhipotézis helyes, azt

várjuk, hogy közel azonos számú minta kerül M_0 fölé és alá - így hasonló számú pozitív és negatív előjelet kapunk. Kevés negatív előjelet várunk, ha a vizsgált változó mediánja nagyobb M_0-nál, míg ha a változó mediánja kisebb M_0-nál kevés pozitív jelet várunk. Elegendően nagy különbség esetén elutasítjuk a nullhipotézist.

A döntést a binomiális eloszlás alapján hozzuk (ld. 3.1.2.). Ha az általunk kapott előjelszám nagy valószínűséggel fordul elő, megtartjuk a nullhipotézist, míg ha a véletlen kis valószínűséggel hoz létre az általunk talált előjelösszeget, akkor H_0-t elutasítjuk. Mivel a binomiális eloszlás kétféle lehetséges kimenetelen alapul (a próbában az előjelek felelnek meg a kimeneteleknek), az M_0-val megegyező x_i-ket kizárjuk a mintából és a mintaszámot a kizárt adatok számával csökkentjük.

A binomiális táblázatban (3. táblázat) kikeressük a mintanagyságnak (n) és a kisebb előjelösszegnek (k) megfelelő oldalakat. Mivel a negatív és pozitív előjel bekövetkezési valószínűsége egyforma, p = 0.5 oszlopokat keressük. A binomiális táblázat nem kumulatív, így szükséges összeadnunk az általunk talált k értéknél kisebb valószínűségeket is.

5.2. példa. Egy emlősökkel foglalkozó vizsgálatban mérték nőstény majmok tömegét. Az egyik területen az alábbi tömegeket kapták: 6.1 7.3 4.2 5.4 2.9 8.4 4.2 6.4 7.0 3.9 kg. Egy másik területen a nőstények tömegének mediánja irodalmi adatok alapján 7.0 kg. Különböző-e a két területen a nőstények tömege ?

Előjelekkel látjuk el a tömegeket:

	Nőstények									
Testtömeg(kg)	6.1	7.3	4.2	5.4	2.9	8.4	4.2	6.4	7.0	3.9
Előjel	-	+	-	-	-	+	-	-	0	-

A tíz nőstény közül kettő volt nehezebb, mint a másik területen élő majmok tömegének mediánja (M_0 = 7.0 kg), és hét nőstény volt könnyebb. Egyetlen nőstény tömege megegyezett M_0-val, ezt az adatot kizárjuk a tesztből. Mivel a pozitív előjelek száma kisebb, k = 2-t keressük ki az n = 9 és p = 0.5-öt feltüntető binomiális táblázatban (3. táblázat). A kettő, vagy annál kevesebb negatív eltérés bekövetkezési valószínűsége

$$P(x \leq 2) = 0.0703 + 0.0176 + 0.0020 = 0.0899$$

Mivel az eltérések pozitív irányban is előfordulhatnak (a teszt kétoldalú), így az általunk kapott előjelösszeg ($x \leq 2$) bekövetkezési valószínűsége $2 * 0.0899 = 0.1798$. Tehát nincs elegendő bizonyítékunk a nullhipotézis elutasítására.

5.1.2. Wilcoxon előjelteszt

Az egymintás előjelteszt érzéketlen x_i és M_0 közötti különbség mértékére. A Wilcoxon előjelteszt előnye az egymintás előjelteszttel szemben, hogy a különbség mértékét felhasználja a tesztben, így nagyobb statisztikai erővel rendelkezik. A teszt alkalmazásának feltétele, hogy a minta random és független megfigyelésekből álljon, a változót legalább intervallumskálán mérjük és a vizsgált populációt reprezentáló változónk eloszlása szimmetrikus legyen. Ha a változó eloszlása nem szimmetrikus, vagy a változót nominális vagy ordinális skálán mértük (pl. növényzeti borítás növekedett, csökkent vagy szinten maradt), akkor egymintás előjeltesztet kell használnunk.

A nullhipotézis és az alternatív hipotézis az előjeltesztével megegyező, azaz

$$H_0: M = M_0 \quad \text{és} \quad H_1: M \neq M_0.$$

A próbastatisztika megállapításához elsőnek kivonjuk x_i-kből M_0-t, és meghatározzuk $D_i = x_i - M_0$ értékeit. Ha $D_i = 0$ az adatot kizárjuk a további feldolgozásból, és a mintaszámot csökkentjük a kizárt adatok számával. Ezután rangokat rendelünk a D_i-khez a D_i-k előjelének figyelembevétele nélkül. Egyező D_i-k esetén az átlagrangokat rendeljük az érintett D_i-khez. Majd a rangokhoz hozzárendeljük a D_i különbség előjeleit, és végül összeadjuk a pozitív és negatív rangokat.

A próbastatisztika a pozitív (T_+) és a negatív rangösszegek (T_-) közül a kisebb érték. Várakozásunk, hogy ha nincs eltérés M és M_0 között T_+ és T_- hasonló értékű lesz. Amennyiben a Wilcoxon táblázat (6. táblázat) kritikus értékénél kisebb T értéket kapunk, elutasítjuk a nullhipotézist.

5.3. példa. A 5.2. példa adatait használjuk. Különbözik-e a két területen a nősténymajmok tömege, ha az összehasonlítást a Wilcoxon előjelteszttel végezzük ?

	Nőstények									
x_i	6.1	7.3	4.2	5.4	2.9	8.4	4.2	6.4	7.0	3.9
D_i	-0.9	+0.3	-2.8	-1.6	-4.1	+1.4	-2.8	-0.6	0	-3.1
Rang	3	1	6.5	5	9	4	6.5	2		8
Rangok előjele	-	+	-	-	-	+	-	-		-

Kiszámítjuk a D_i különbségeket, majd 7.0 kizárása után a különbségek abszolút értéke alapján rangokat rendelünk D_i-hez. A rangok előjelét a D_i előjele mutatja. A negatív rangok összege $T_- = 40$, és a pozitív rangoké $T_+ = 5$. A Wilcoxon táblázat alapján az 5 vagy annál kisebb rang előfordulásának valószínűsége n = 9 és k = 5-nél

$$P(x \leq 5) = 0.0195$$

A teszt kétoldalú, így a nullhipotézis helytállóságának az esélye 2 * 0.0195 = 0.039. A nullhipotézis helytállóságának az esélye kicsi, így az alternatív hipotézist fogadjuk el. Az egymintás előjelteszt nem talált szignifikáns különbséget a két területen élő majmok tömegében (5.2. példa), míg a Wilcoxon előjelteszt a különbséget felderítette.

5.1.3. Páros előjelteszt

Amennyiben két minta között kapcsolat áll fenn, pl. kísérleti alanyokat kísérlet előtt és után mértük, páros előjelteszttel vagy Wilcoxon páros előjelteszttel célszerű használni. A páros előjelteszt alkalmazása akkor is praktikus, amikor csak a változás előjelét tudjuk, de a változás mértékét nem. A páros előjelteszt alkalmazási feltétele, hogy a méréseket legalább ordinális skálán végezzük, a minta random mérőpárokból álljon és a mérőpárok egymástól függetlenek legyenek.

A teszt nullhipotézise, hogy az összehasonlítandó minta különbségeinek mediánja nulla, azaz

$H_0: M_D = 0$ és $H_1: M_0 \neq 0$.

Az egymintás előjeleszthez hasonlóan a próbastatisztika a pozitív és negatív előjelösszegek közül a kisebbik érték. A próbastatisztika kiszámításához $D_i = x_i - y_i$ különbségek előjeleit meghatározzuk. Ha $D_i = 0$ az adatot kizárjuk az analízisből. Számítjuk a negatív és pozitív előjelek előfordulási gyakoriságát. A pozitív és negatív előjelösszegek közül a kisebbik értéket a binomiális eloszlással hasonlítjuk össze (ld. 3.1.2.). A nullhipotézist elutasítjuk, amennyiben a pozitív vagy a negatív előjelek túl ritkán fordulnak elő.

5.4. példa. Rovarirtószerrel kezeltek növényeket. Tíz növény egy-egy levelén kezelés előtt és után megszámolták az atkákat. A nullhipotézis, hogy a kezelés nem befolyásolta az atkák számát.

	Atkák száma / levél									
Kezelés előtt	1050	84	77	110	440	5	48	16	340	430
Kezelés után	640	70	83	64	420	6	26	3	75	16
Változás előjele	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-

A tesztstatisztika a pozitív előjelek előfordulása, k = 2. A B(10,0.5) eloszlásnál a binomiális táblázat (3. táblázat) alapján

$$P(x \leq 2) = 0.0439 + 0.0098 + 0.0010 = 0.0547$$

Az alternatív hipotézisünk kétoldalú ($p = 2 * 0.0547 = 0.1094$), így a nullhipotézis megtartása mellett döntünk.

5.1.4. Wilcoxon páros előjelteszt

Míg a páros előjelteszt figyelmen kívül hagyja a két minta különbségének mértékét, a Wilcoxon páros előjelteszt figyelembe veszi a különbség mértékét. A teszt alkalmazásának feltétele, hogy legalább intervallumskálán mérjük a vizsgált változót, a minta random adatpárokból álljon, mintán belül az adatpárok függetlenek legyenek és a két minta különbségének eloszlása szimmetrikus legyen a különbség mediánja körül.

A tesztelendő hipotézisek:

H_0: $M_D = 0$ és H_1: $M_D \neq 0$.

A próbastatisztika kiszámításához az adatpárok különbségeit számítjuk $D_i = x_i - y_i$. Ha $D_i = 0$ az adatot kizárjuk a feldogozásból. Ezután rangokat rendelünk D_i-khez D_i abszolút értéke alapján. A rangokhoz hozzárendeljük a különbség előjelét, majd a pozitív és negatív rangok összegét számoljuk (T_+ és T_-). Döntést a kisebbik T érték alapján hozzuk. Amennyiben az általunk talált T érték kisebb a kritikus értéknél, a nullhipotézist elutasítjuk.

5.5. példa. Az 5.4. példa adatait használjuk.

	Atkák száma / levél									
Kezelés előtt	1050	84	77	110	440	5	48	16	340	430
Kezelés után	640	70	83	64	420	6	26	3	75	16
D_i	-410	-14	6	-46	-20	1	-22	-13	-265	-414
Rang	9	4	2	7	5	1	6	3	8	10
Rang előjele	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-

$T_- = 52$ és $T_+ = 3$

A Wilcoxon táblázatban (6. táblázat) n = 10-nél $T_+ = 3$ valószínűsége 0.0049. Az alternatív hipotézis kétoldalú, így a nullhipotézis elutasítása mellett döntünk $p = 2 * 0.0049 = 0.0098$ valószínűséggel. A Wilcoxon páros előjelteszt statisztikai erejét mutatja, hogy a páros előjeleszttel szemben elutasította nullhipotézist (5.4. példa).

5.2. Minták lokalizációjára vonatkozó tesztek

Az alábbi tesztek két (5.2.1) vagy több minta (5.2.2) elhelyezkedésének összehasonlítását végzik a mediánok tesztelésével. A páros tesztekkel szemben a minták között nincs reláció.

5.2.1. Mann-Whitney teszt

Az egyik leggyakrabban alkalmazott nem-paraméteres próba, a kétmintás t-próbával analóg. Feltétele, hogy a minták random megfigyelésekből álljanak és az összehasonlítandó két minta független legyen egymástól. A teszt két minta mediánját hasonlítja össze. A nullhipotézis, hogy a két minta (x_1, x_2) azonos mediánú populációból származik.

H_0: $M_{x1} = M_{x2}$ és H_1: $M_{x1} \neq M_{x2}$.

A próbastatisztika kiszámításához a két mintát összevonjuk és az adatokat növekvő sorrendbe állítjuk. Rangokat rendelünk az összevont minták adataihoz. Amennyiben azonos értékek fordulnak elő, az érintett adatokhoz az átlagos rangokat rendeljük. A próbastatisztika

$$T = S - n_1(n_1 + 1) / 2,$$

ahol S az első minta rangszámainak összege, és n_1 az első minta elemszáma. A képletben $n_1(n_1 + 1) / 2$ korrekciós tényező, amely n_1 összrangját adja meg, ha az első minta összes eleme kisebb a második minta elemeinél. Várakozásunk, ha az első minta mediánja kisebb a második minta mediánjánál, a T próbastatisztika értéke kicsi lesz, míg ha azonos mintanagyságnál az első minta mediánja nagyobb a másodiknál, a T statisztika nagy érték lesz. A nullhipotézist elutasítjuk, ha T kisebb, mint a Mann-Whitney táblázatban (7. táblázat) feltüntetett $w_{\alpha/2}$ kritikus érték, vagy nagyobb mint $n_1n_2 - w_{\alpha/2}$, ahol n_1n_2 a T próbastatisztika maximális értéke.

Amennyiben n_1 vagy n_2 nagyobb, mint 20 a Mann-Whitney táblázatot nem használhatjuk. Nagy mintáknál a Mann-Whitney próbastatisztika normáleloszláshoz közelít, és így a szignifikanciák becsülhetők a z táblázat alapján (2. táblázat).

$$z = \frac{T - n_1n_2 / 2}{\sqrt{n_1n_2(n_1 + n_2 + 1) / 12}}$$

5.6. példa. A bíbicek *Vanellus vanellus* tojásméretét vizsgálták. A bíbicek két élőhelyen költenek a Dél-Alföldön: legelőn és kaszálón, Különböző tömegűek-e a két élőhelyen lerakott tojások ? A nullhipotézis, hogy a két élőhelyen nem különbözik a tojások tömege.

Legelő		Kaszáló	
Fészek	Tömeg (g)	Fészek	Tömeg (g)
1	24.6	1	26.2
	21.5		22.5
	22.5		25
	26.3		23.8
2	23	2	26
	24		26.1
	24.3		25.6
	27	3	25.8
3	27.2		25.8
	25		22.9
	24.1		23.2
	24.1	4	20.1
	22		22.8
4	20.9		23.8
	26		23.5
	25.5	5	22.9
	25.1		26.1
5	25.8		23
	25.2		27
	22.5	6	21.5
	23.5		23.5
6	27.6		26
	22.5		24
	25.2	7	20.9
	25.7		22.5
7	24		24.1
	23.5		25
	24	8	24.1
			25.8
			20.1
			25.2
		9	25.8
			27.2
			25.6
			22.8

Egyetlen fészekaljon belül azonban a 3-5 tojás tömege nem független egymástól, mivel a tojók hasonló méretű tojásokat raknak. Így a tojások tömegét fészekaljanként átlagoljuk, és az átlagokat használjuk a rangsoroláshoz. Feltételezzük, hogy a fészkeket különböző tojók rakták.

	Legelő			Kaszáló	
Fészek	Tömeg (g)	Rang	Fészek	Tömeg (g)	Rang
1	23.725	3	1	24.375	8.5
2	24.575	12	2	25.900	16
3	24.480	11	3	24.425	10
4	24.375	8.5	4	22.550	1
5	24.250	7	5	24.750	13
6	25.250	14	6	23.750	4
7	23.833	6	7	23.125	2
		61.5	8	23.800	5
			9	25.350	15
					74.5

$S = 61.5$, $n_1 = 7$ így

$$T = 61.5 - \frac{7(7+1)}{2} = 33.5$$

mivel $n_1 = 7$, $n_2 = 9$ így a táblázat alapján

$w_{0.025} = 13$

$w_{0.975} = 50$

T értéke nem kisebb az alsó kritikus értéknél, sem nem nagyobb a felső kritkikus értéknél, ezért a nullhipotézist nem utasítjuk el $p = 0.05$ szinten.

5.2.2. Kruskal-Wallis teszt

Míg a Mann-Whitney teszt két minta összehasonlítását végzi, a Kruskal-Wallis teszt kettőnél több minta lokalizációját képes összehasonlítani a minták rangjai alapján. A Kruskal-Wallis teszt az egyutas variancianalízis nem-paraméteres megfelelője. A teszt alkalmazásának feltétele, hogy $k \geq 3$ legyen, a k mintán belül és a minták között a megfigyelések függetlenek legyenek, és a minták adatait random módon gyűjtsük.

A próba nullhipotézise, hogy a k populáció azonos, míg az alternatív hipotézis, hogy legalább egy populáció mediánja eltér a többi populáció mediánjától. A próbastatisztika kiszámításához az összevont mintákat sorba állítjuk, és rangokat rendelünk az adatokhoz. Ezután számoljuk az egyes mintákban a rangok összegét. A rangösszegek alapján a próbastatisztika

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} \left[R_i - \frac{n_i(N+1)}{2} \right]^2,$$

ahol R_i az i-edik minta rangjainak összege, n_i az i-edik minta elemszáma, és N az összminta elemszáma. A szögletes zárójelben lévő képlet a minta számított (R_i) és várt rangja $n_i(N + 1) / 2$ közötti eltérés. Az eltéréseket a mintaszámok reciprokával súlyozzuk. A próbastatisztika kiszámítását az alábbi képlet alapján végezzük:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1).$$

A nullhipotézist elutasítjuk, amennyiben H nagy, azaz R_i jelentősen eltér a várt rangoktól. H-t a 8. táblázat kritikus értékeivel hasonlítjuk össze. Amennyiben a 8. táblázatot nem tudjuk használni, azaz $k \geq 3$ és $n_i \geq 5$, H-t a χ^2 táblázat kritikus értékeivel hasonlítjuk össze (11. táblázat). Kimutatható ugyanis, hogy nagy k és n_i -nél a H χ^2 eloszlást követ k-1 szabadsági fokkal.

5.7. példa. Három erdőben vizsgálták a hektáronkénti fák számát. Az erdészek nullhipotézise szerint nincs különbség a három erdő fasűrűségében. Fenntartható-e a nullhipotézis?

	Fa / hektár						R_i
A erdő	126	142	156	228	245		
Rang	7	8	9	11	12		47
B erdő	98	98	216	249	301	319	
Rang	5.5	5.5	10	13	14	15	63
C erdő	29	39	60	78			
Rang	1	2	3	4			10

A három mintát összevonjuk, és az összevont minta rangjait az adatokhoz rendeljük. A tesztstatisztikát R_i-k alapján számoljuk:

$$H = \frac{12}{15 \cdot 16}\left(\frac{47^2}{5} + \frac{63^2}{6} + \frac{10^2}{4}\right) - 3 \cdot 16 = 8.415$$

A kritikus érték $\chi^2_{2,0.025} = 7.378$ ($p = 0.025$ szinten és 2 szabadsági foknál), így a három erdő azonos fasűrűségére vonatkozó nullhipotézist elutasítjuk.

5.3. Rangkorreláció

5.3.1. Spearman rangkorreláció

Két változó közötti kapcsolat mérésére a leggyakrabban használt nem-paraméteres eljárás. Feltétele, hogy az adatok n random megfigyeléspárból (x_i és y_i) álljanak és a megfigyeléspárok ugyanazon egységre vagy alanyra vonatkozzanak. A nullhipotézis, hogy x és y független, míg az alternatív hipotézis, hogy a két minta nem független egymástól. A Spearman rangkorrelációs koefficiens kiszámításához először x értékeihez rangokat rendelünk hozzá ($R(x_i)$) majd y értékeivel hasonlóan járunk el ($R(y_i)$). Ha azonos értékű adat fordul elő, akkor mindegyik adathoz az átlagos rangot rendeljük hozzá.

A próbastatisztika

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)},$$

ahol

$$\sum d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [R(x_i) - R(y_i)]^2.$$

Látható, hogy ha d_i értéke "kicsi", akkor x és y adatpárok rangjai között kicsi a különbség, és pozitív asszociációt kapunk. Míg x és y adatpárok közti nagy különbség esetén

d_i nagy érték lesz, és r_s -1-hez közelálló értéket ad. A nullhipotézist elutasítjuk, ha r_s nagyobb, mint a Spearman rangkorrelációs táblázatban feltüntetett kritikus érték (9. táblázat), vagy kisebb, mint a kritikus érték negatív előjelű megfelelője.

5.8. példa. Kopuláció közben elfogott *Phymatidae* poloskák tömegét vizsgálták. A kutatók kérdése, van-e bizonyíték asszortatív vagy disszortatív párosodásra - azaz a párzó hímek és nőstények tömege pozitívan vagy negatívan korrelál.

Hímek		Nőstények	
Tömeg (g / 100)	Rang	Tömeg (g / 100)	Rang
0.64	8	1.35	12
0.71	10.5	1.18	10
0.49	1	1.05	4.5
0.56	4	1.10	8.5
0.51	2	1.05	4.5
0.83	13	1.07	6
0.71	10.5	1.04	3
0.65	9	0.97	2
0.62	7	1.20	11
0.75	12	1.43	13
0.53	3	0.84	1
0.60	5.5	1.08	7
0.60	5.5	1.10	8.5

A hímeket és nőstényeket tömegük alapján külön-külön rangsorba állítjuk, majd a rangok különbségének négyzetösszegét számítjuk.

$$d_i = (8 - 12)^2 + (10.5 - 10)^2 + ... + (5.5 - 8.5)^2 = 241.5$$

és $r_s = 1 - 6 * 241.5 / 13 * (13^2 - 1) = 0.337$

A Spearman rangkorrelációs táblázatban a p = 0.05-ös kétoldalú szignifikanciaszinthez tartozó kritikus érték 0.560. Mivel r_s kisebb 0.560-nál és nagyobb -0.560-nál, így nincs indokunk a nullhipotézis elutasítására és a hímek és nőstények méretének kapcsolatára vonatkozó alternatív hipotézis elfogadására. Ha a kutatók hipotézise csupán az asszortatív párosodásra vonatkozott volna, egyoldalú szignifikanciaszintet alkalmazhattak volna (p = 0.05-nél a kritikus érték 0.484). A pozitív korrelációra vonatkozó alternatív hipotézist ebben az esetben sem fogadhatták volna el, mivel a tapasztalt r_s belül esett a -0.484 és + 0.484 tartományon.

5.4. Függetlenség és homogenitásvizsgálat

A minták közti asszociáció vizsgálatára nemcsak a rangkorrelációs teszt alkalmas. K. Pearson 1900-ban eloszlásvizsgálatra javasolta a χ^2 próbát, amelyről később kiderült, hogy alkalmas függetlenség és homogenitás vizsgálatra is. Az alábbiakban elsőnek a χ^2 próba és a G-teszt függetlenségvizsgálati felhasználását (5.4.1. és 5.4.2.), majd pedig homogenitásvizsgálatát ismertetjük (5.4.3. és 5.4.4.). A χ^2 próbát és a G-teszt-et kis mintanagyságoknál nem alkalmazhatjuk, ilyen esetekben a Fisher exakt teszt segít (5.4.5.).

5.4.1. Függetlenségvizsgálat χ^2 próbával

A χ^2 próbát két változó asszociációjának tesztelésére használhatjuk. A χ^2 próba alkalmazásának feltétele, hogy az adatok n random egységből álljanak, a megfigyelések két változó egy-egy kategóriájába tartozzanak. A változók lehetnek kvalitatív (kategóriákból álló változók) vagy olyan kvantitatív változók, amelyeket kategóriákba lehet sorolni. A próba alkalmazásának ugyancsak feltétele, hogy túl kicsi gyakoriság ne szerepeljen a táblázatban. Javasolt, hogy a várható értékek nem több, mint 25 %-a legyen kevesebb 5-nél.

A próba nullhipotézise, hogy a két változó független. Az alternatív hipotézis, hogy a két változó nem független. A tesztstatisztika arra épül, hogy az oszlopok és sorok szerinti független kategorizás esetén a várható gyakoriságok

$$E_{ij} = n(n_{i.} / n)(n_{.j} / n) = n_{i.}(n_{.j} / n),$$

ahol E_{ij} a i-edik sorba és j-edik oszlopba tartozó várható gyakoriság, $n_{i.}$ az i-edik sor összege, $n_{.j}$ a j-edik oszlop összege és n a mintaelemszám.

A próbastatisztika a várható gyakoriságok és a megfigyelt gyakoriságok különbségének négyzete alapján mutatja a független besorolástól való eltérés mértékét:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left[\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}\right].$$

Dönteni a χ^2 táblázat alapján tudunk (r - 1)(c - 1) szabadsági foknál (11. táblázat), ahol r a sorok száma és c az oszlopok száma. Ha a χ^2 nagy érték, a függetlenségtől jelentős eltérés van.

5.9. példa. A csontos halak ***Osteichtyes*** megtermékenyítési módja és utódgondozása közti kapcsolatot vizsgálták a családok jellemző viselkedésének összehasonlításával. Az alábbi táblázatban tüntették fel a családok számát, ahol nincs utódgondozás, vagy az egyik nem (hím vagy nőstény) gondozza az utódokat.

Megfigyelt gyakoriságok (O):

	Megtermékenyítés módja		
Gondozás típusa	Belső	Külső	Összesen
Hím	2	61	63
Nőstény	14	24	38
Nincs utódgondozás	5	100	105
Összes	21	185	206

Az oszlop- és sorösszeg alapján számítjuk a várható gyakoriságokat (E-t). Például, a belső megtermékenyítésű és hím gondozó családok várható gyakorisága 21 * 63 / 206 = 6.42.

	Megtermékenyítés módja		
Gondozás típusa	Belső	Külső	Összesen
Hím	6.42	56.58	63.00
Nőstény	3.87	34.13	38.00
Nincs utódgondozás	10.7	94.30	105.00
Összes	21.00	185.00	206.00

$$\chi^2 = [(2 - 6.42)^2 / 6.42 + ... + (100 - 94.3)^2 / 94.3] = 36.29$$

Az adatok eltérnek a függetlenséget feltételező várható gyakoriságoktól. A nullhipotézist $p < 0.005$ szinten elutasítjuk, mivel az általunk számított χ^2 értéke nagyobb a 11. táblázatban kettes szabadsági foknál $p = 0.005$-re feltüntetett kritikus érték ($\chi^2_{2,0.005} = 10.597$).

5.4.2. Függetlenségvizsgálat G-teszttel

A függetlenségvizsgálat másik elterjedt módja a G-teszt. A G-teszt a megfigyelt gyakoriságok természetes logaritmusa alapján teszteli az adattáblázat függetlenségét. A G-teszt feltételezi, hogy a várható gyakoriságok nagyobbak vagy egyenlők 5-tel.

A próba nullhipotézise, hogy a két változó független. Az alternatív hipotézis, hogy a két változó nem független egymástól. A tesztstatisztikát az alábbi képlet alapján számíthatjuk:

$$G = 2\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} f_{ij}\ln f_{ij} - \sum_{i=1}^{r} f_{i.}\ln f_{i.} - \sum_{j=1}^{c} f_{.j}\ln f_{.j} + n\ln n\right),$$

ahol f_{ij} az i-edik sorba és j-edik oszlopba tartozó megfigyelt gyakoriság, $f_{i.}$ az i-edik sor összege, $f_{.j}$ a j-edik oszlop összege, és n az összgyakoriság. A szabadsági fok az oszlopok és a sorok egyel csökkentett kategóriáinak száma, azaz df = (r - 1) * (c - 1). G eloszlása közel azonos a χ^2 eloszlással, így a döntésünket a χ^2 táblázat alapján hozzuk (11. táblázat).

5.10. példa. A *Cicindela* nemzetségbe tartozó homokfutrinkák színének gyakoriságát vizsgálták különböző évszakokban. Van-e elegendő alapunk, hogy elvessük a szín és évszak közti függetlenségre vonatkozó nullhipotézist, ha az alábbi egyedszámokat találták?

Évszak	Szín		Összes
	Piros	Pirostól eltérő színű	
Koratavasz	29	11	40
Későtavasz	273	191	464
Koranyár	8	31	39
Késönyár	64	64	128
Összes	374	297	671

$G = 2 * (29\ln29 + 11\ln11 + .. + 64\ln64) - (40\ln40 + .. + 128\ln128) - (374\ln374 + 297\ln297) + (671\ln671) = 28.596$

A χ^2 táblázat kritikus értéke $\chi^2_{(3,0.005)} = 12.838$ (11. táblázat), így a nullhipotézist elutasítjuk. A homokfutrinkák színe nem független az évszaktól.

5.4.3. Homogenitásvizsgálat χ^2 próbával

A homogenitásvizsgálat célja annak felderítése, hogy a minták egy vagy több populációból származnak-e. A χ^2 próba alkalmazásának feltételei homogenitásvizsgálatban megegyeznek a függetlenségvizsgálatnál említettel (ld. 5.4.1).

A teszt nullhipotézise, hogy a vizsgált populációk homogének. Az alternatív hipotézis, hogy a populációk nem homogének. A próbastatisztika és a számítás menete megegyezik a függetlenségvizsgálatban alkalmazottal (ld. 5.4.1.). A függetlenségvizsgálat és a

homogenitásvizsgálat közti különbség a várható gyakoriság kiszámításának logikájában és a mintavétel módjában van. Míg a függetlenségvizsgálatban a várható gyakoriságokat a minták függetlenségének feltételezése alapján számoltuk ki, a homogenitásvizsgálatban a várható gyakoriságokat a populációk homogenitását feltételezve számoljuk ki. Így az adatokat egyetlen, összevont mintaként kezeljük, és a vízszintes és függőleges kategóriapárba eső várt gyakoriságokat az oszlop- és sorösszegekből számítjuk. Továbbá, a függetlenségvizsgálathoz a mintákat egyetlen populációból vesszük, és a megfigyeléseket mintavétel után soroljuk kategóriákba, míg homogenitásvizsgálatnál a populációkat mintavétel előtt azonosítjuk, független mintákat veszünk belőlük és a teszttel vizsgáljuk, hogy a minták egyetlen populációba tartoznak-e.

5.4.4. Homogenitásvizsgálat G-próbával

A próba alkalmazásának feltételét, a próbastatisztika számításának módját és a döntés módját ld. 5.4.2. A teszt nullhipotézise, hogy a vizsgált populációk homogének. Az alternatív hipotézis, hogy a vizsgált populációk nem homogének.

5.11. példa. Nyolc házilégy *Musca domestica* utódait vizsgáljuk. Az utódok szeme 'vad' típusú vagy mutáns 'fakó'. Kérdésünk, hogy a minták egyetlen populációból származnak-e ?

Szülők	Vad	Mutáns	Összes
1	83	47	130
2	77	43	120
3	110	96	206
4	92	58	150
5	51	31	82
6	48	61	109
7	70	42	112
8	85	66	151
Összes	616	444	1060

$G = 2 * [(83\ln 83 + ...66\ln 66) - (130\ln 130 + ...151\ln 151) - (616\ln 616 + 444\ln 444) + 1060\ln 1060] = 16.515$

A talált különbség nagyobb, mint a χ^2táblázat kritikus értéke ($\chi^2_{(7,0.025)} = 16.013$) (11. táblázat), így a nullhipotézist $p = 0.025$ szinten elutasítjuk. Az utódok fenotípusa nem homogén.

5.4.5. Fisher-féle exakt teszt

A χ^2 próbát és a G-tesztet kis mintaszámnál (5-nél kisebb várható gyakoriságoknál) nem tudjuk alkalmazni. A kis minták homogenitásának tesztelését a Fisher-féle exakt teszttel végezhetjük, amennyiben két minta dichotomikus (két értéket felvevő) változójának homogenitását szeretnénk összehasonlítani, pl. nemek (hímek, nőstények) túlélési esélye (fennmaradás, pusztulás) eltérő-e. A próba feltétele, hogy a minták függetlenek legyenek egymástól és gyűjtésük random módon történjen.

A teszt nullhipotézise, hogy egy tulajdonság gyakorisága (p) a két mintában megegyezik, míg az alternatív hipotézis szerint a két mintában a tulajdonság eltérő gyakoriságú:

H_0: $p_1 = p_2$ és H_1: $p_1 \neq p_2$.

A teszt elve, hogy kiszámítjuk az általunk tapasztalt - és annál szélsőségesebb eltérések valószínűségeit, majd a valószínűségeket összegezzük (a számításmenetet lásd: Sokal és Rohlf 1981). A gyakorisági táblázat helyes elrendezésével a munkaigényes számolást elkerülhetjük. Amennyiben a gyakorisági táblázatunkat úgy készítjük, hogy $A \geq B$, és $(a / A) \geq (b / B)$, b próbastatisztikával tesztelhetjük, vajon a két mintában eltérő-e a tulajdonságok gyakorisága.

A gyakorisági táblázatat az alábbi módon kell elkészíteni, ahol tulajdonság 1 és tulajdonság 2 kizárja egymást, és a változó összes lehetséges értékét tartalmazza:

	Változó		
Minta	Tulajdonság 1	Tulajdonság 2	Összesen
1	a	A - a	A
2	b	B - b	B
Össz	a + b	A + B - a - b	A + B

5.11. Példa.Egy viselkedésbiológiai kísérletben vizsgálták, hogy a széki lilék *Charadrius alexandrinus* az első család felbomlása után ismét párbaállnak-e. A vizsgálatban megjelölt 11 hím közül 6 kapott új nőstényt, míg 9 nőstény közül 7 kapott új párt. Különböző gyakorisággal kaptak-e új párt maguknak a hímek és nőstények ?

Az adatokat táblázatba rendezzük, hogy a táblázat megfeleljen a fenti feltételeknek:

	Új pár		
Ivar	Nincs	Van	Össz
Hím	5	6	11
Nőstény	2	7	9
Össz	7	13	20

A 12. táblázatból kikeressük az A = 11, B = 9 és az a = 5 értékeket. Az egyoldalú kritikus érték p = 0.03-nál 0. Az általunk talált b azonban nagyobb 0-nál. Mivel a tesztünk kétoldalú, a nullhipotézis elutasítására nincs indokunk, legalább $p > 0.06$ szinten.

5.5. Illeszkedésvizsgálat

Illeszkedésvizsgálatra van szükségünk, ha tesztelni kívánjuk adataink követnek-e bizonyos eloszlást, vagy ha össze akarjuk hasonlítani két megfigyeléssorozat eloszlását. A χ^2 próba és a G-teszt harmadik felhasználási területe az illeszkedésvizsgálat (5.5.1 és 5.5.2.). Az illeszkedés tesztelésére gyakran használt további teszt a Kolmogorov-Szmirnov teszt (5.5.3.). Míg a χ^2 próba és a G-teszt az összes adatot felhasználja az illeszkedés vizsgálatára, a Kolmogorov-Szmirnov próba a maximális eltérés alapján tesztel.

5.5.1. Illeszkedésvizsgálat χ^2 próbával

A próba nullhipotézise, hogy a minta egy bizonyos eloszlású populációból származik, míg az alternatív hipotézis, hogy a minta nem ilyen eloszlású populációból származik. A próba feltételeit, a próbastatisztika számítását ld. 5.4.1. A szabadsági fok a kategóriák számánál eggyel kevesebb. Az illeszkedésvizsgálattól eltérés, hogy a várható gyakoriságokat egy elméleti

függvényből, vagy a mintából becsült függvényből számoljuk. Az utóbbi esetben a szabadsági fokot csökkentjük a mintából számolt paraméterek számával.

5.12. példa. Egy *Drospohila* keresztezési kísérletben az utódok 3:1 arányú fenotípusát várjuk. Az utódok között 80 vad és 10 mutáns volt. A megfigyelt gyakoriság eltér-e a várttól ?

	Megfigyelt gyakoriság (O)	Várt gyakoriság (E)	$(E - O)^2 / E$
Vad	80	67.5	2.315
Mutáns	10	22.5	6.944
Összes	90	90	9.259

A χ^2 táblázat kritikus értéke ($\chi^2_{(1,0.005)} = 7.879$, 11. táblázat) kisebb, mint az általunk számított érték (9.259), így a nullhipotézist $p = 0.005$ szinten elvetjük.

5.5.2. Illeszkedésvizsgálat G-próbával

A próba nullhipotézise, alternatív hipotézise és szabadsági foka 5.5.1.-hez hasonló.

A próbastatisztika

$$G = 2\sum_{i=1}^{n} f_i \ln\left(\frac{f_i}{\hat{f}_i}\right)$$

ahol f_i az i -edik kategóriában megfigyelt gyakoriság, míg $\hat{f}_i$ az i-edik kategóriában várt gyakoriság. A G értéket a χ^2 táblázat kritikus értékével hasonlítjuk össze (11. táblázat).

5.13. példa. Az 5.12. példa genetikai kísérletének adatait használjuk. Teszteljük, hogy a megfigyelt gyakoriságok illeszkednek-e a 3:1 arányhoz.

	f_i	p_i	$\hat{f}_i$	$f_i \ln(\frac{f_i}{\hat{f}_i})$
Vad	80	0.75	67.5	13.592
Mutáns	10	0.25	22.5	-8.109
Összesen	90	1.00	90.0	5.483

$G = 2 * 5.483 = 10.966$

Mivel a χ^2 táblázat kritikus értéke $\chi^2_{(1,0.005)} = 7.879$, így a χ^2 próba eredményéhez hasonlóan (5.12. példa) a nullhipotézist $p = 0.005$ szinten elvetjük.

5.5.3. Kolmogorov-Szmirnov teszt

Míg a χ^2 próba és a G-teszt kategóriákba sorolt adatok illeszkedését vizsgálja, a Kolmogorov-Szmirnov teszt folytonos adatok illeszkedésének tesztelésére használható. A teszt egyik leggyakoribb felhasználási területe változók normáleloszláshoz illeszkedésének tesztelése. Alkalmazásának feltétele, hogy a minta n db független megfigyelésből származzon. F(x) annak az eloszlásnak a kumulatív (összegzett) változója, ahonnét az adatok származnak, $F_0(x)$ pedig egy hipotetikus eloszlás kumulatív valószínűségi változója. A Kolmogorov-

Szmirnov teszt kis mintáknál is alkalmazható, mivel a χ^2 próbával és a G-teszttel szemben nem feltételez minimálisan szükséges várható gyakoriságokat.

A tesztelendő hipotézispár:

H_0: $F(x) = F_0(x)$ x összes értékére,

H_1: $F(x) \neq F_0(x)$ legalább egy x-nél.

A próbastatisztika a feltételezett kumulatív elméleti eloszlás és a megfigyelt kumulatív eloszlás közti maximális különbséget keresi:

$$D = \max\left|F_0(x) - S(x)\right|$$

ahol S(x) a minta kumulatív relatív gyakorisága x helyen. A tapasztalt eloszlás lépcsőzetes alakjából adódóan az x_i-hez tartozó legnagyobb eltérés a lépcsőfok "jobb" és "bal" oldalánál egyaránt előfordulhat, így nem elég kiszámolnunk a $D_i^+ = \left|F_0(x_i) - S(x_i)\right|$ különbségeket, hanem a $D_i^- = \left|F_0(x_i) - S(x_{i-1})\right|$ különbségeket is meg kell határoznunk (5.2. ábra). A két eloszlás közti eltérést könnyen okozhatja a véletlen. A Kolmogorov-Szmirnov táblázat (10. táblázat) kritikus értékénél nagyobb vertikális különbség esetén elutasítjuk a nullhipotézist.

5.14. példa. n = 12 rák *Pachygrapsus crassipes* testtömegét lemérjük. Illeszkedik-e a rákok tömege az $\bar{x}$ = 12.048 g átlagú és s = 6.484 g szórású normáleloszláshoz (5.2. ábra) ? Első lépésben kiszámoljuk, hogy az eloszlás hányadrészét tartalmazzák a lemért rákok - normál eloszlást feltételezve. Az $(x_i - x) / s$ értékeket számítjuk, majd a standard z táblázatból (2. táblázat) keressük a kumulatív gyakoriságokat. A tapasztalt kumulatív eloszlás $S(x_i) = i / n$. Ezután a várt ($F_0(x_i)$) és a megfigyelt kumulatív gyakoriságok ($S(x_i)$) különbségeit (D_i^+), végezetül D_i^--ket számoljuk. D_i^+és D_i^-közül a legnagyobb különbséget keressük.

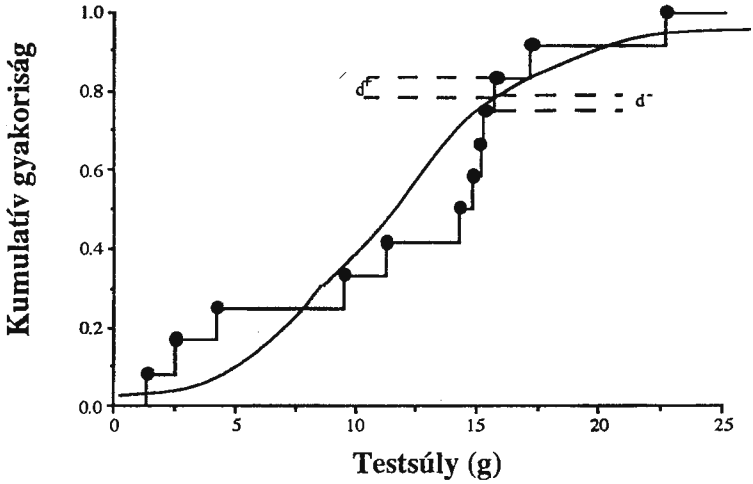
i	Tömeg (g)	$(x_i - x) / s$	$F_0(x_i)$	$S(x_i)$	D^+_i	D^-_i
1	1.41	-1.64	0.051	0.083	0.033	0.051
2	2.50	-1.47	0.071	0.167	0.096	0.013
3	4.19	-1.21	0.113	0.250	0.137	0.054
4	9.52	-0.39	0.348	0.333	0.015	0.098
5	11.30	-0.12	0.452	0.417	0.036	0.119
6	14.40	0.36	0.641	0.500	0.141	0.224
7	14.90	0.44	0.670	0.583	0.087	0.170
8	15.20	0.49	0.688	0.667	0.021	0.105
9	15.39	0.52	0.699	0.750	0.052	0.032
10	15.81	0.58	0.719	0.833	0.114	0.031
11	17.25	0.80	0.788	0.917	0.129	0.045
12	22.70	1.64	0.950	1.000	0.051	0.033

A legnagyobb különbséget (D_i^- = 0.224) teszteljük a Kolmogorov-Szmirnov táblázatban (10. táblázat). A kritikus érték p = 0.05 és n = 12 esetében 0.375, így a nullhipotézist nem utasítjuk el.

5.6. Random előfordulási teszt

A tesztet események random egymásutániságának (sorozatának) eldöntésére vezették be. Sorozatnak nevezzük az egyetlen eseménytípusból álló eseményszekvenciát. A random

előfordulási teszt feltétele, hogy az események két típusba legyenek sorolhatók, pl. fej (F) vagy írás (Í).



5.2. ábra Normáleloszláshoz illeszkedés tesztelése Kolmogorov-Szmirnov próbával. A próba a legnagyobb eltérés alapján tesztel.

A nullhipotézis, hogy a sorozatok előfordulása random, vagyis egy esemény előfordulása független az előző esemény előfordulásától. Az alternatív hipotézis, hogy a megfigyelések előfordulása nem random. A próbastatisztika azon alapul, hogy a random mintázattól kétféle eltérés lehetséges. Egyrészt, az események szabályosan követhetik egymást, pl: FÍFÍFÍFÍFÍ; vagy az események csoportokat alkothatnak, pl: FFFFFÍÍÍÍÍ. A próbastatisztika (r) a szekvenciák összes számát jelenti. Ha r kisebb a random előfordulási teszt táblázatának alsó kritikus értékénél (13. táblázat), akkor a nullhipotézist elutasítjuk, mivel az események csoportosulnak. Abban az esetben is elutasítjuk a nullhipotézist, ha r nagyobb a felső kritikus értéknél (14. táblázat), mivel az események szabályosan váltják egymást.

5.15. példa. Egy vizsgálat során az egyetemi étkezdébe belépő első 38 magányos hallgató német időrendi sorrendben jegyezték fel. Az alábbi megfigyeléseket kapták, ahol L egy lány és F egy fiú belépését jelenti. Random sorrendben jöttek-e a hallgatók?

LLLLFFFLLFFFLFFFLFFFLLFFLFFLLLFFFFLLLL

A lányok szekvenciáinak száma 8, és a fiúk szekvenciáinak száma 7, így r = 15. Mivel r a random előfordulási teszt alsó kritikus értéke ($R_{0.05}$ = 13) és felső kritikus értéke ($R_{0.05}$ = 28) közé esik n_L = 18 és n_F = 20-nál, így a nemek érkezésének sorrendje nem tér el a randomtól.

A húszon felüli mintanagyságnál nem használhatjuk a random előfordulási teszt táblázatát. Nagy mintáknál a próbastatisztika normáleloszlást követ:

$$z = \frac{r - \left\{\left[(2n_1n_2)/(n_1+n_2)\right]+1\right\}}{\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}}}$$

Így nullhipotézisünket a standard normáleloszlással (2. táblázat) tesztelhetjük.

6. Hogyan közöljük adatainkat és prezentáljuk eredményeinket?

6.1. Bevezetés

A tudományos kutatás szerves része és befejező mozzanata az eredmények közlése. A tudományos kutatás nem lehet öncélú, azaz a közpénzen végzett kutatás eredményeit nem tarthatjuk meg magunknak. Ugyanakkor egy kutató kvalitását is legbiztosabban tudományos közleményei alapján ítélhetjük meg. Ezért legalább akkora figyelmet kell fordítanunk eredményeink megjelentetésére, mint magukra a vizsgálatokra. Sokszor ez előbbi sokkal tovább tart, mint maga a kísérlet.

Az utóbbi évtizedek tapasztalata szerint az igazán jó tudományos eredmények ma már nem egy-egy kutató több évtizedes magányos erőfeszítésének, hanem jól szervezett teammunkának az eredménye. Ugyanez vonatkozik a tudományos prezentációkra (dolgozat, poszter, konferencia előadás, film, könyv, disszertáció stb) is. Egy egy közleményt legtöbbször már több szerző ír meg, és a végső megírt változat számos kolléga, lektor és szerkesztő közös munkájának eredménye. Mindezek ellenére az adott publikációért a felelősséget az első szerzőnek kell vállalnia.

Hihetetlen mennyiségű tudományos eredmény jelenik meg napjainkban még egy szűk területről is. Ezért ma már nem lehet olyan módon tudományos műveket írni, ahogy pl. Humbold vagy Darwin tette annak idején. A mondanivaló minél tömörebb, ugyanakkor pontos és ellenőrizhető formában való közlése szükséges. Ez az igény arra vezetett, hogy a tudományos munkák formai és tartalmi alapjai egyre inkább közelednek egymáshoz, kialakultak ennek a kifejezési formának a szabályai. Sajnos ezeket jelenleg a kutatásképzésben nem oktatják hazánkban, és emiatt a kutatók sokáig szenvednek e tájékozottság hiánya miatt.

Jelen fejezet azt tűzi ki célul, hogy általános irányelveket adjon az eredmények közléséhez és megkönnyítse azt az időszakot, amíg magunk nem szerzünk kellő tapasztalatot ebben a témában. Két féle ismeret szükséges ahhoz, hogy sikerrel meg tudjunk birkózni első néhány tudományos közleményünk megírásával (pl. szakdolgozat, disszertáció, tudományos és ismeretterjesztő cikk) :

1, Pontosan tudnuk kell, hogy mit és miért csináltunk a tudomány területén,

2, Ismernünk kell azt a nyelvet, amelyen írni szándékozunk (mind általában, mind a szakterület speciális kifejezéseit).

6.2. Tudományos stílus és nyelv

A rossz stílusban megírt cikkek szerzői az olvasót rejtvényfejtési feladat elé állítják. A legjobb és legfontosabb eredményeket sem lehet kihámozni egy homályosan megírt műből. Gondoljunk arra, hogy a cikk anyagát a szerző ismeri a legjobban, ezért, ami neki egyértelműnek tűnik, az másnak talán korántsem az. Bizonyos félreértés már abból is adódik, hogy az írott szöveg semmiképpen nem képes visszadni az élő beszéd hangsúlyait és interaktív jellegét.

A tudományos nyelvben különösen ügyelni kell a mutatószavak, utalószavak pontos használatára. A szakirodalom stiláris követelményei jelentősen eltérnek a szépirodalométól. Egy tudományos cikkben nem líraiságra, szellemességre, hanem tárgyilagosságra és világosságra kell törekedni. Szedjük szét a hosszú mondatokat, a főnévcsoportokat és a jelzőhalmazokat. Az elvont főnevek helyett inkább igéket, a bonyolult kifejezések helyett egyszerűeket használjunk, még ha ismétlésre is kényszerülünk ezáltal. Kerüljük a jelentést nem hordozó vagy az

egyértelmű jelentést zavaró töltelékszavakat pl. alapjában véve, tulajdonképpen stb. A mindennapi beszédben bizonyos szavak többféle jelentéssel bírnak, mások köznyelvi értelme teljesen különbözik a tudományos jelentéstől (pl. a környezet szó köznyelvi, ökológiai és matematikai jelentése jelentősen eltér).

A legfontosabb az, hogy az egész művön végigvonuljon egy logikai lánc. Mi talán részenként jutottunk a tudáshoz és az eredményekhez, azonban azt logikus sorrendben kell tálalni, hogy egy kívülálló könnyedén megértse. Ehhez tisztán kell látnunk az ok-okozati kapcsolatokat. Célszerű ezt a lehetőleg lineáris logikai kapcsolatrendszert vázként tekinteni a cikk megírásához.

A tömörség miatt kerüljük az üres mondatokat. Ezek nem közölnek információt. Pl. *A tojó tojásmérete és testhossza közötti összefüggést láthatjuk az első ábrán.* Ehelyett írjuk a tényeket: *A tojó tojásmérete és testhossza között szignifikáns összefüggést találtunk (statisztikai információk) (1. ábra)*

Kerüljük a statisztikával, vagy egyéb módon alá nem támasztott "információk" közlését: pl. *Jó eredményt kaptunk a 4. csoportnál is.*

A helyes stílus nemcsak az olvasókra és a bírálókra, hanem a szerzőre is jótékony hatású, mivel rákényszerül gondolatai rendezésére és kevesebb kudarcélmény éri. A helyes stílus a tudományban nem az egyéni, hanem a világos stílus, és ez a tudomány minden területére vonatkozik.

Milyen nyelven közöljünk?

Erre rövid és egyértelmű válasz adható az egész biológiát tekintve: ANGOLUL. Természetesen itt is van néhány kivétel pl. szakdolgozat, disszertációk, amit hazánkban még mindíg magyarul kell megírni. Nincs azonban értelme egy tudományos munkát olyan nyelven közölni, amin csak egy-két potenciális érdeklődő olvas. Angolul minden számottevő kutató képes kommunikálni, a folyóiratok 95%-a is angol nyelvű. Ezért csak különleges indokkal publikáljunk idegen nyelven (pl bizonyos alkalmazott kutatások) (ekkor is válasszunk valamilyen világnyelvet: franciát, németet, spanyolt vagy japánt) és csatoljunk hozzá angol nyelvű összefoglalót.

Nagyon fontos szem előtt tartanunk, hogy egy tudományos eredményt csak egyszer közölhetünk le, akármilyen nyelven is tesszük azt. Nem vihetjük tehát magyarul megírt kéziratunkat különböző fordítókhoz, és azután nem küldhetjük el különböző nyelvű folyóiratokhoz. Aki ezt teszi súlyos erkölcsi vétséget követ el. Az idegen nyelvi fordításokkal egyébként is óvatosan kell bánni. Nemcsak azért, mert nagyon költséges, hanem azért is, mert a fordítók sokszor nem ismerik a tudományos zsargont és nem értik azt sem, amit mi magyarul leírtunk. Sokszor nem is lehet egyértelműen átültetni a két nyelv gondolatait, azaz angolul másképpen kell gondolkodni és írni. Ezért mindenféleképpen angolul fogalmazzunk, még ha rossz is nyelvileg, de legalább azt írjuk, amit mondani szeretnénk. Ezt már könnyebb javítani, a legmegfelelőbb erre a célra egy türelmes angol anyanyelvű munkatárs.

6.3. Milyen eredményeinket közöljünk

Ez felettébb nehéz kérdés, mivel ellentétes tendenciák érvényesülnek e kérdés körül. A kutatóktól a legtöbb helyen elvárják, hogy szép számmal közöljék le eredményeiket, mivel ez egyfajta ismérve a kutatási kvalitásnak és szükséges velejárója a kutatási támogatások elnyerésének. Némelykor adott idő áll rendekezésre a mű elkészítéséhez (pl. szakdolgozat), máskor az adott témában prioritásunkat akarjuk biztosítani, ezért az eredményt minél hamarább le szeretnénk közölni.

A másik tendencia a minőség oldaláról közelít. Csak akkor közöljünk, ha mondanivalónk van, azaz ha valódi tudományos eredményt tudunk felmutatni. Ne közöljük tehát első ködös gondolatainkat, részeredményeinket. Problémát okozhat a túl hosszúra nyúlt munka közlése is. Az évekig, évtizedekig tartó munka után már a kutató sem mindíg emlékszik mindenre, és az óriási anyagot sem megírni, sem megemészteni nem lehet tökéletesen. Ne közöljünk csak azért, mert olyan sokat dolgoztunk valamin, de sajnáljuk kidobni, mert kiderült, hogy tévúton jártunk. Az " üres közlemények" egy legjellemzőbb fajtája azoktól a kutatóktól származnak, akik "beásták" magukat egy szűk területre, visszarettennek minden újtól, és inkább a vizsgálatok mennyiségével próbálják pótolni az új eredményeket.

Az információ nélküli közlemény nem tévesztendő össze a negatív eredményeket közlő munkáktól. Ez utóbbi munkák nagyon fontosak, mert kizárásos alapon megnövelik az ismereteinket. Itt inkább az a baj, hogy a kutatók negatív eredményeiket csak ritkán publikálják, és ez azzal jár, hogy kutatók garmadája próbálkozik ugyanúgy hiába, ahelyett, hogy új utakat keresnének.

Legjobb, ha felteszünk magunknak néhány kérdést eredményeinkkel kapcsolatban és megvitatjuk ezeket munkatársainkkal is:

Elegendőek-e adataim az adott kérdés megválaszolásához?

Következtetéseim megalapozottak vagy hipotézis jellegűek?

Hogyan illik eredményem az irodalomban közöltekhez?

Mindenféleképpen a minőség oldaláról döntsünk, mert az a becsületes és közép és hosszú távon ez térül meg. Egy jó közlemény többet ér egy kutató értékelésekor, mint 10 üres cikk. Ha úgy ítéltük meg, hogy van mit közölnünk, és tisztában vagyunk a fő stílusbeli problémákkal is, akkor már csak azt kell eldöntenünk, hogy hol és hogyan próbáljuk meg a közlést.

6.4. Milyen fórumon és mely orgánumban közöljünk?

A tudományos prezentáció lehet szóbeli (pl. előadás), írásbeli (dolgozat, cikk stb.) vagy a kettő keveréke (pl. poszter egy konferencián). A következőkben kizárólag az írásbeli közlésre koncentrálunk, ezek kiemelt fontossága miatt.

Az írásbeli munkákat két kategóriára lehet bontani:

1. Elsőfajú közlemény : tudományos folyóiratban megjelent cikk.

2. Másodfajú közlemény: könyvfejezet vagy könyv, kongresszusi összefoglalóban megjelenő összefoglalás vagy rövid cikk, disszertációk stb.

Egyértelmű szabály, hogy ugyanazt az eredményt csak egyetlen egyszer szabad elsőfajú közleményként megjelentetni. Ettől még részt vehetünk ezzel az anyaggal konferenciákon, írhatunk belőle könyvet vagy disszertációt, függetlenül attól, hogy ezt az anyagot már megírtuk elsőfajú közleményként, vagy csak a jövőben fogjuk megírni. A másodfajú közlemények a kutatók közötti gyors és hatékony információcserét segítik elő, amíg az elsőfajúakkal tartható számon egy kutató kvalitása.

Némely esetben előre eldöntött (pl. szakdolgozat, disszertáció) hogy milyen orgánumban közöljünk. A legtöbb esetben azonban nekünk kell eldönteni ezt a fontos kérdést. Három szempontot kell megbecsülnünk és figyelembevennünk ehhez a döntéshez:

1, Milyen értékes a munkánk?

2, Kikhez akarunk szólni?

3, Mennyi anyagi forrásunk van munkák közlésére?

Az első pont a legfontosabb és erősen összefügg a **Milyen eredményeket közöljünk?** című fejezetben tárgyaltakkal. Munkánk értékét kollégáink érdeklődésén és a

szakirodalom alapos ismeretéből jövő információkon kívül jól felmérhetjük egy kongresszuson tartott előadásunk sikerével. Nagyon fontos ezt megtennünk, mert egy tudományos munka értéke és további sorsa nagyban attól függ, hogy milyen tudományos lapban közöljük. A folyóiratok különböző szakmai színvonalúak, a jó színvonalú folyóirat szerkesztője, lektorai is jobbak, ezt a tudományos folyóiratot több kutató is olvassa, mint a gyengébbeket. Abban azonban biztosak lehetünk, hogy egy színvonalas lap sokkal nagyobb valószínűséggel utasítja vissza publikálásra szánt kéziratunkat, mivel ezekben sok kiváló kézirat verseng a megszabott éves oldalszámokért. Viszont, ha sikerül egy neves nemzetközi lapban publikálnunk, ez több százszorosát is érheti annak, mintha egy lokális gyenge tudományos orgánumban jelenik meg egyébként igen érdekes munkánk. Ez főleg annak tulajdonítható, hogy a kutatók elsősorban a rangos folyóiratokat olvassák, és jobban bíznak az ezekben található, erős szűrőn átment eredményekben.

Egy folyóirat relatív értékének eldöntésében segítenek a különféle mutatók pl. citációs index, citációs féléletidő. Ezek az információk minden nagyobb tudományos könyvtárban beszerezhetők. Nagyon hasznos, ha legalább néhány példányát látjuk annak a folyóiratnak, amelybe publikálni szeretnénk. Ez segít a 2. pont megválaszolásában. Minden folyóiratnak van valamilyen speciális profilja. Ez némileg a nevéből is sejthető, de a belső borítókon feltüntetik részletesen is, hogy milyen témakörökre számítanak. Ne küldjünk tehát ökológiai cikket a Journal of Endocrinology nevű folyóiratnak, mert akármilyen kiváló is egyébként, visszaküldik. Teszik ezt azért, mert tudják, hogy ezt a folyóiratot elsősorban nem az ökológia iránt érdeklődők olvassák, ezért a cikket itt elásnánk. Ügyeljünk a finom különbségekre is! Egyik folyóirat főleg kísérleti, másik elméleti profilú; az egyik a gerincesek viselkedésökológiájával foglalkozik, a másik csak a denevérekével. Ezért fontos eldöntenünk, hogy egy szűk szakmai réteghez kívánunk szólni (pl. Journal of Hymenoptera Researches), vagy a kutatótársadalom nagy részéhez (Science).

A cikkünk anyagi vonzata is jelentős lehet (3. pont). Sok folyóirat (elsősorban amerikai folyóiratokra jellemző) pénzbeli hozzájárulást (page charge) kér a szerzőtől munkájának leközléséhez. Ez sok esetben lehetetlenné teszi a közlést. Tudnunk kell azonban, hogy ez a probléma három módon megoldható:

1. Pénzügyi kérelemmel fordulunk valamilyen tudományos alapítványhoz. Ezt akkor tehetjük, ha már megvan az írásbeli igazolás arról, hogy munkánkat elfogadták.

2. Belépünk abba a tudományos társaságba (ha van ilyen), amelynek gondozásában a folyóirat megjelenik. Ekkor több évre osztjuk el az anyagi terheket, mivel a tagdíjakat kell csak fizetni. A publikáció tagoknak általában ingyenes.

3. Keresünk egy hasonló tematikájú és kvalitású folyóiratot, ahol nem kell fizetni (ilyen a neves európai lapok többsége). Ez utóbbi gyakorlatilag a legkönnyebb, mivel napjainkban igen sok tudományos folyóirat jelenik meg.

6.5. Anyaggyűjtés a tudományos közleményhez.

Sajnos néha hallunk kutatóktól valami ilyesmit: Már majdnem kész a cikkem, csak az irodalmakat kell hozzákeresnem. Nos az ilyen kutató hiába írta meg "üres" cikkét, vagy nincs miért tovább irodalmaznia. Nyilvánvaló, hogy az irodalommal naprakészen kell lennünk mindíg. Enélkül nem is érdemes belekezdenünk egy vizsgálatba, mivel nem tudjuk hogy mit érdemes kutatni, és ez hogyan függ össze az eddigi eredményekkel.

Egy adott témáról gyorsan gyűjthetünk sok információt. Teljeskörű ismeret megszerzéséhez azonban általában több évre van szükség. Ajánlatos először néhány angol nyelvű egyetemi tankönyvet vagy teljes tudományágat felölelő kötetet átrágni. Az itt megtalálható alapvető fogalmak, törvényszerűségek nélkül a szakcikkek sokszor meg sem érthetők. Ezután tekintsünk át néhány szemlét (review-k, amiket már szűkebb érdeklődési körünkből veszünk. Ezek általában több száz szakcikk eredményeit tekintik át kritikusan, és

ezek pontos referenciája kiváló kiindulópont lesz további anyaggyűjtésünkhöz. A következő lépés, hogy a legfontosabb szakcikkeket összegyűjtjük és elolvassuk. Ez nem könnyű Magyarországon, ahol kevés nagy tudományos könyvtár van, de kellő utánajárással megoldható. Segítséget jelenthetnek a referencia folyóiratok (pl. Current Contents), vagy számítógépes adatbankok (pl. BIOSIS) átnézése. Itt általában csak a cikk és folyóirat címe és néhány kulcsszó alapján tájékozódhatunk, de megtalálhatjuk a szerző munkahelyének címét is. Ha a cikk nem túl régi, írhatunk a szerzőnek egy lapot, amiben megkérjük, hogy az adott cikket és más hasonló témájúakat küldje el számunkra. Biztosak lehetünk benne, hogy ha egy mód van rá hamarosan elküldi, mert ez a tudóstársadalomban egy több évtizedes szokás és komunikációs forma.

A másik fontos anyagforrás kutatásaink eredménye, amit általában a jegyzőkönyvben rögzítünk. Ez tartalmazza az adatokat, a vizsgálati körülményeket és sok egyéb információt. Nyugodtan mindenki használjon olyan jegyzőkönyvezést, ami neki a legjobban megfelel, erre bevált formák nincsenek. A jegyzőkönyv formája és részletessége az adott kutató személyiségéhez kapcsolódik. Ne felejtsük el azt, hogy amit nem írunk le azt könnyen elfelejthetjük a sokszor évekig tartó anyaggyűjtés során, vagy pontatlanul emlékezünk rá. Nagyon kínos, ha jegyzőkönyvünk -amibe esetleg egy munkacsoport több éves munkáját rögzítették- elveszik. Ezért lehetőleg ne óriási, mindent felölelő jegyzőkönyvünk legyen. Nagyon hasznos, ha a feljegyzési és adatgyűjtő jegyzőkönyvvel párhuzamosan vezetünk egy feldolgozásit is. Ebben már nem a nyers adatokat, hanem az első feldolgozott eredményeket vezetjük. Nagyon hasznos, ha a vizsgálati nap, vagy egyéb rövid időszak után azonnal végzünk egy rövid értékelést. Ez a módszer akkor is hasznos, ha számítógépes adatrögzítést és feldolgozást végzünk. A napi feldolgozások során nemcsak azt látjuk mennyit végeztünk el a munkából, és hogy a mai nap mennyiben igazolta hipotézisenket, hanem állandóan ellenőrizhetjük hogy mennyi adatot kell még felvennünk. Sok kutató nehezen tudja abbahagyni az adatgyűjtést, mivel beáll annak rutinszerű gyűjtésére, és nem kalkulálja ki a szükséges mintaszámot. A túlzott adatgyűjtés ugyanúgy káros, mint a kevés adat, mert elveszi az időt az egyéb kérdések megválaszolásától. A menetközbeni feldolgozás ezen túl még újabb ötleteket adhat a további vizsgálatokhoz.

6.6. A tudományos közlemény megírása

6.6.1. A tudományos közlemény részei és az első változat megírása

A tudományos közlemények tagolása szigorú szabályokat követnek, ami alól azonban indokolt esetben el lehet térni. Ha nincs erős indokunk, ne térjünk el, mert nemcsak az olvasó helyzetét, hanem saját publikálási lehetőségünket is nehezítjük.

Az alábbi részeket érdemes kiemelni az alábbi sorrendben (* feltételesen kért vagy szükséges információk):

Cím
Szerzők neve
Szerzők munkahelye és címe
* Egyéb információk: tartalomjegyzék, fejléc, cikk verziószáma, leadási dátum, kulcsszerző neve (akivel érdemes kontaktusba kerülni a cikk révén), kulcsszavak
Összefoglaló vagy Kivonat (Summary, Abstract)
* Összefoglaló más idegen nyelven
Bevezetés (Introduction)
Anyag és módszerek (Materials and Methods)

Eredmények (Results)
Megvitatás, Értékelés vagy Diszkusszió (Discussion))
Köszönetnyilvánítások (Acknowledgements)
Irodalomjegyzék (References)
* Függelék (Appendix)

Az, hogy a kézirat végső formájának ilyennek kell lennie az nem jelenti azt, hogy így is kell megírni. Sokszor célszerű egy könnyebb résszel, pl. Anyag és módszerek, kezdeni. Így belerázódunk a cikkírás lelki állapotába. Aztán jöhetnek az egyéb részek. A diszkussziót azonban mindenféleképpen az eredmények rész után írjuk, mert máskülönben nem fogunk tudni jól hivatkozni eredményeinkre. Az összefoglalót és a címet pedig az első változat megírásakor el is hagyhatjuk. Ezeket akkor érdemes megírni, amikor a cikk már összeérett.

Az első változat megírása nagyon fontos. Célszerű akkor nekifogni, ha tudjuk, hogy amíg meg nem írjuk, csak ezzel foglalkozhatunk. Ekkor sok időt nyerünk és a kézirat minősége is sokkal jobb lesz. Logikai vázlatunk alapján lehetőleg egyhuzamban írjuk le gondolatainkat. Nem baj, ha a mondatok fésületlenek az irodalmak pontos hivatkozása elmarad, ha sikerül logikailag felépíteni a tíz-húsz gépelt oldalú cikket, akkor nagyot léptünk előre. Egy logikus cikket akár részenként is javítgathatunk, amíg egy rossz első változat igen megkeseríthet életünket, mert vagy nehezen szakadunk el az ott leírt gondolatoktól, vagy teljesen át kell írni megint az egészet.

6.6.2. A cím és egyéb információk

Formailag a cím a cikk legfontosabb része. A kutatók nagy része csak művünk címének elolvasásáig jut el. Talán néhány ezrelék fog továbbhaladni cikkünk olvasásában, vagy ír nekünk, hogy küldjük el különlenyomatunkat számára. A címnek ezért informatívnak és rövidnek kell lennie. Fontos, hogy a cím azt takarja, amit a cikk mond. Nem ígérhetünk a címben valami nagy dolgot, ha annak csak egy perifériális részjelenségével foglalkoztunk. A cikk címe ne legyen túl részletes sem, mert ezzel esetleg potenciális érdeklődőket riaszthatunk el. Ne legyenek a címben ilyen-olyan tudományág nevei, a vizsgálatok, kutatások, kísérletek stb. szavak, hanem valódi információt hordozzon. Pl. *'Döntési mechanizmusok az emlősöknél'*, vagy *'Viselkedésökológiai vizsgálatok a háziló párzási szokásaival kapcsolatban'* nem szerencsés címek, ha mi azt vizsgáltuk, hogy a háziló csődör a ló vagy a szamárkancát részesíti-e előnyben párként egy bizonyos szituációban. A helyes cím lehet pl. *'A háziló hímjének párválasztása X körülmény mellett'*, vagy kérdésként: *'Miért részesíti előnyben a lócsődör párzótársként a szamárkancát X körülmény fenállásakor?'*. A tréfás címeket: pl. *'Ha ló nincs szamár is jó?'* tartogassuk azokra az időkre, amikor már olyan híres kutatók leszünk, hogy ezt nekünk elnézik.

A szerkesztőség kérhet tőlünk egyéb rövid információt a cikkel kapcsolatban pl fejléc, ami a cím rövid, de értelmes változata lehet. Disszertációk vagy nagyobb művek esetén kérhetnek tartalomjegyzéket. Több folyóiratnál fel kell tüntetni a cikk verzió- és/vagy hivatkozási számát, a leadási dátumot és több szerző esetén azt a szerzőt akivel érdemes kontaktusba kerülni a cikk révén, mert ő folytatja a programot, ő a laborvezető stb).

6.6.3. A szerzők és munkahelyük

A szerzőség kérdése néha nagy vitákat vált ki még az addig legjobban összedolgozó kollégák között is. Pedig a szerzőséggel kapcsolatban jól körülhatárolt szabályok vannak. A problémák inkább abból adódnak, hogy a kutatók ezeket nem ismerik, vagy megpróbálják kijátszani. A problémák már a szakdolgozatnál kezdődnek, ami nagyon ritkán kizárólag a

hallgató munkája. Ezért, a disszertációknál sokszor kötelezik a szerzőt arra, hogy határolja körül mit csinált ténylegesen az adott munkában és a címoldalon tüntesse fel a konzulens nevét.

A többi tudományos közleménynél az eset korántsem ilyen egyszerű. A probléma két részre bontható:

1, Kit vegyünk be szerzőnek?

2, Mi legyen a sorrend a bevett szerzők között?

Ezek a kérdések azért bírnak fontossággal a kutatók számára, mert a közleményeket általában az első szerző nevéhez kötik. Fontos, a már említett tudománymetriai okokból, hogy a szerző neve minél több cikkben benne legyen. Minden kutatónak jó tehát, ha minél több jó cikkben szerepel szerzőként a neve és minél előbb a rangsorrendben. A kívánalmak helyett azonban a szerzőségnek a tudományos hozzájárulást kell tükröznie.

1. Nem kell szerzőnek bevennünk, akinek ezért a munkáért külön fizettünk. Ezeket a diplomásokat és a laboránsokat a Köszönetnyilvánítás fejezetben említhetjük meg név szerint. Szerzőnek vegyünk be minden diplomás kutatót, aki jelentős hozzájárulást végzett a kutatásban és annak kidolgozásában. Jelentős hozzájárulást jelenthetnek ha valaki:

- biztosította a kutatás személyi, anyagi és elsősorban szakmai feltételeit;
- az alapötletet adta vagy más jelentős ötlettel , speciális tudással járult hozzá a kutatáshoz
- elvégezte a kísérleteket vagy a vizsgálatokat;
- elvégezte az adatok rendezését és a tudományos közlemény megírását.

Így nem kell társszerzőnek bevenni azt aki anyagot adott, de ha pl. szintetizál valami speciális vegyületet akkor a szerzők között a helye.

Kutatónők lehetőleg leánykori nevüket használják, mert ez független a pillanatnyi családi állapottól, és nagyon fontos, hogy egy kutató egész életében egy néven szerepeljen. Emellett szól az is, hogy a magyar férjezett nevek (pl. Domb Rezsőné) nem vihetők át könnyedén az angol nyelvbe. Gyakran a keresztnevek rövidítve szerepelnek pl. T. Hill. Kutatónők esetén azonban célszerű, és szükséges kiírni a teljes nevet pl: Rachel Smith.

2. Némely tudományos vezetők erős függőségi viszonyt építenek ki az adott munkahelyen. Itt a kutatóknak cikkeik kész kéziratát be kell nyújtani a főnöknek, aki "átolvassa", majd első szerzőként beírja magát a cikkbe és ezzel nyújt engedélyt a cikk közlésére. Aki így jár el, az a tudományos erkölcs ellen vét. A kézirat átolvasásáért nem jár semmilyen szerzőség még akkor sem, ha a kutatási kereteket és feltételeket a főnök tartja a kezében. Ne felejtsük el, a hozzájárulás tudományos hozzájárulást jelent!

Az első szerző mindíg az, aki a legtöbb munkát végezte a közlésre kívánt tudományos eredményben. Ez nem feltétlenül a legtöbb idő eltöltését jelenti. Lehet, hogy egy teljesen új eredeti ötlet kidolgozása csak 10 perc (persze, hogy ez sikerült, esetleg évtizedes állandó felkészültség eredménye), a tesztelés meg egyszerű, de 3 évig tart. Ekkor nyilvánvalóan az első személy az első szerző. Ha ez az ötlet eléggé elkoptatott (pl. mérjük le hány tojást tojik egy szezon alatt az X madár, bár már rengeteg közeli rokonáról tudjuk ezt), akkor nyilvánvaló, hogy a második személy, aki a méréseket végezte, válik az első szerzővé. Általában az első szerző feladata megírni a cikket és a fő felelősség is őt terheli. Nem mondhatja tehát, ha kiderül, hogy valamilyen számítási hiba van, hogy kérem a második szerző elrontotta.

A további szerzők a hozzájárulás arányában következnek a szerzők sorrendjében. Néha ABC sorrendben tüntetik fel a szerzőket bizonyos folyóiratok, de ez csak látszólag szerencsés. Nagy kutatócsoportoknál akár egy tucat név is lehet a szerzők között pl. egy nagy project egy részmunkája esetén. Ekkor gyakori megoldás, hogy az első szerző a legnagyobb hozzájárulású, az utolsó szerző pedig a project tudományos vezetője. Így mind a munka, mind a project jól azonosítható.

Összefoglalva: kizárólag szakmai szempontok alapján döntsünk a szerzőségről és ennek sorrendjéről. Sokszor célszerű a munka legelején ezekben megállapodni, így elkerüljük a

félreértéseket. Minden esetben tudjon róla és egyezzen bele az a személy, aki közleményünkben szerzőként szerepel!

6.6.4. Az összefoglalás vagy kivonat

Ez a rész a tudományos közlemény legfontosabb és leginformatívabb része. A cím után ezt a részt olvassák leginkább a kutatók, a cikk-katalógusukat sokszor az összefoglalások alapján állítják össze. Nagyon fontos tehát, hogy az összefoglalásunk felkeltse az érdeklődést és jól megírt legyen. Általában elmondható, hogy az a jó összefoglalás, ha ebből és az ábrák áttekintéséből megérthető a tudományos közlemény mondanivalója. Ügyeljünk arra, hogy ez a rész minél rövidebb legyen (lehetőleg egy gépelt oldal körül), mert a túl hosszú összefoglaláson kevesebben fogják átrágni magukat, és a mondanivaló lényege is nehezebben domborodik ki. Az összefoglalás terjedelmét a kiadó gyakran erősen limitálja. Használjunk rövid mondatokat. Célszerű, ha gondolatainkat 4-5 pontba csoportosítjuk. Tartalmilag az eredményekre koncentráljunk csak, ha azonban a módszer vagy az eredmény valamely következménye különleges vagy fontos, ezeket is okvetlenül említsük meg.

6.6.5. A bevezetés

A bevezetés munkánk tudományos előzményeit tárgyalja. Nem tévesztendő össze az ú.n. irodalmi áttekintéssel, amely a régi stílusú disszertációk része. A bevezetés alapján értetjük meg az olvasóval, hogy a címben ígért tudományos probléma miért fontos, és ennek vizsgálatában hol tart a tudomány. A bevezetést nem feltétlenül az ókori görögöktől kell kezdeni, hanem a leglényegesebb tárgyhoz tartozó irodalmakat tekintsük át és a fejezetet saját véleményünk alapján szerkesszük meg.

A legjellegzetesebb hibás bevezetéseket a sovány, a széteső, és szemle típusúra oszthatjuk fel. A sovány bevezetés rövid és velőtlen, jól tükrözi a szerző hiányos ismereteit. Általában csak néhány kézikönyvre vagy tankönyvre hivatkozik, vagy ezek irodalomjegyzékében található irodalmakra. Ezek a hivatkozások is túl általánosak vagy semmitmondók, a kérdésfeltevés emiatt az égből pottyan, a logikai felépítés nem érthető. Ugyancsak jellemző az ilyen típusú bevezetésre, hogy a hivatkozások többsége egy általános bekezdésben, sőt sokszor csak egy mondatban vannak elhelyezve.

A szemle típusú bevezetés bizonyos tekintetben ellentéte a soványnak, bár ugyanúgy hibás. A szerző itt megfelelő előismeretekel rendelkezik, de nem tudja megállni, hogy ezt ne fitogtassa. A bevezetés emiatt olyanná válik, mint egy szemle típusú önálló közlemény, s mint ilyen nem az adott kérdésfeltevésre, hanem inkább egy szűkebb tudományterületre koncentrál. Ebben a nagy halmazban az olvasó vagy elvész, vagy arra jön rá, hogy ezen előismeretek birtokában a kérdésfeltevés lehetne fontosabb vagy teljesen más is.

A széteső bevezetésben, bár a szerző megfelelő tájékozottsága nyilvánvaló lehetne az idézett irodalmak alapján, ez nem derül ki, mivel a bevezetés nem rendelkezik logikai összefüggésekkel. Ezek sokszor úgy készülnek, hogy a szerző összeírja, hogy mit ír az irodalom, de nem gondolja át és nem rendszerezi ezeket az ismereteket megfelelően. Itt találhatók meg az olyan mondatok, hogy 'X ezt írta Y azt, Z szerint viszont...'. Hiányzik a saját vélemény, és nem látható tisztán, hogy melyik tudományos vonal inspirálta munkáját. Sokszor találunk itt olyan információkat, amelyeknek a diszkusszió részben lenne a helyük, mivel eredményeinket ezekkel az információkkal jól kontrollálhatjuk.

Fontos, hogy a bevezető előtt gondoljuk át ismét, hogy mely közönségnek írjuk művünket. A bevezetést úgy írjuk meg, hogy ezen közösségen belül bárki megérthesse kérdésfeltevésünk fontosságát. Célszerű az első bekezdésben egy kicsit tágabb áttekintést adni és bemutatni, hogy a mi kérdésfeltevésünk hogyan kapcsolódik egy tágabb problémához (pl. a reproduktív stratégiákhoz, a viselkedésökológiához, vagy a biológiához), attól függően, hogy

milyen fajsúlyú. Ezután szigorúan szűkítsük le a bevezetés témakörét arra, amit ténylegesen vizsgálni fogunk az eredmények részben. Okvetlenül említsünk meg minden lényeges információt, ami előmozdítja vizsgálataink fontosságának felismerését. Nem szükséges minden információt külön citálni. Ha van az adott témáról néhány jó szemle, akkor ezeket idézzük, így az olvasó nemcsak jobb referenciát kap, de a bevezető is olvashatóbbá válik.

A bevezetés utolsó bekezdése tartalmazza a munka fő célkitűzését. A bevezetésnek a logikai menet révén erre a részre kell "kilyukadnia". Mivel minden tudományos közlemény célszerűen egy kérdést tesz fel, azt itt kell leírni. Ha e kérdésnek néhány alkérdése bennünket különösen érdekel, és a későbbiekben foglalkozunk vele, azokat is célszerű itt kifejteni. Utaljuk a metodológiára és a különlegesebb módszerekre is! Célszerű, ha a célkitűzés hipotézisek ellenőrzése, és a hipotézis(ek), ezek predikciói (levont következtetések) és tesztelésük mikéntje alkotja a bevezetés utolsó bekezdését.

6.6.6. Anyag és módszerek

Nem minden tudományos közlemény része (pl. elméleti munkákban nem szerepel). Fontos, hogy a kísérletek, vagy megfigyelések ellenőrizhetők és reprodukálhatók legyenek. Ezért a vizsgálati módszereket a kísérletek megismétlését lehetővé tevő részletességgel le kell írni. A kísérletben használt anyagokat, állattörzseket, vagy a populációk előfordulási helyét is itt közöljük. Ha van egy már bevált módszer, hivatkozzunk rá ahelyett, hogy részletesen leírnánk az egészet. Ahol lehet, ott csak azokat a különbségeket írjuk le módszerünk és a már irodalomban fellelhető módszerek között, amelyek lényegesek.

A vizsgálat eredménye nem lehet jó, ha hibás módszert használtunk, ezért a lektorok sokszor különleges hangsúlyt fektetnek erre a részre. Az anyag és módszerek részben nem logikai lánc vonul végig, hiszen ez több elég független részből állhat, hanem az áttekinthetőség és reprodukálhatóság a fontos. Sokszor célszerű a módszereket olyan sorrendben ismertetni, ahogy majd az eredményekben használjuk őket. Célszerű lehet alrészekre felosztani ezt a főrészt, ami megkönnyíti a visszakeresést, ha az eredmények olvasásakor vissza akarunk ugrani a módszerek olvasásához.

6.6.7. Eredmények

A tudományos közlemény e részében közöljük kutatásaink eredményeit és azokat a bizonyítékokat, amelyek állításainkat igazolják vagy szemléltetik. Eredményeinket néha szavakkal írjuk le pl "udvarláskor rezgő mozgást végez". Ez sokszor teljesen kielégítő és megfelelő lehet (az adott példánál maradva nem szükséges megadni a rezgés frekvenciáját, ha erre jó okunk nincs). Azonban ahol lehet, számszerű eredményeket használjunk, mivel ezek tesztelhetők. Ne a nyers leolvasási adatok tömkelegét közöljük, hanem dolgozzuk fel és redukáljuk adatainkat oly módon, hogy maximális áttekinthetőség mellett a lehető legjobban és korrekt módon vonhassunk le belőle következtetéseket (lásd statisztikai hipotézisvizsgálatok).

Az 'Eredmények' fejezetben csak a száraz tényeket ismertessük. Hagyjuk ki belőle a következtetések nem odaillő részét, a megjegyzéseket és az irodalmi adatokkal való összevetést. Ezeknek a diszkusszióban a helyük. Az eredmények rész szöveg, táblázat és ábra formában közli azokat az új eredményeket, amelyeket közölni szándékozunk. Az érthetőség és világosság mellett a logikai lánc felépítésére és az esztétikus prezentációra is ügyelnünk kell. Rosszul közölt nagyszerű eredmények nehezen, vagy egyáltalán nem érthetők. Egy hosszú eredmények főrészt osszunk fel alrészekre.

6.6.8. Értékelés

Ritkábban használják a 'Megvitatás', a 'Diszkusszió' vagy a 'Megbeszélés' címet is a magyar közleményekben. A diszkusszió az eredmények után következik, ahol az eredményekből levont következtetések és azok értékelése foglal helyet. Rövidebb közleményeknél a két részt néha összevonják 'Eredmények és diszkusszió' címen. Ennek megvan az az előnye, hogy a magyarázatokat rögtön az eredmények ismertetésekor kapjuk. Az ilyen fejezetet megírni is könnyebb, azonban az eredmények rész gyakran széttöredezetté a diszkusszió pedig gyengévé válik. Ezért ezt a módszert lehetőleg ne használjuk.

A diszkusszióban is arra törekszünk, hogy mondanivalónkat logikai sorrendbe rendezzük. Ez a logika azonban nyugodtan eltérhet a bevezetés és az eredmények logikájától. Megállapításaink következzenek viszont kapott eredményeinkből, azaz a diszkusszióban nem beszélhetünk másról, mint kapott eredményeinkkel összefüggő dolgokról. Eredményeinket bármilyen sorrendben diszkutálhatunk, ha logikánk ezt követeli. Egy eredményre vagy ábrára többször is hivatkozhatunk. Ne ismételgessük azonban eredményeinket, e fejezet célja, hogy magyarázzuk azokat. Nagyon rosszak azok a diszkussziók, ahol mégegyszer elmondják az eredményeket, ahelyett hogy magyaráznák vagy összehasonlítanák őket más eredményekkel.

A diszkusszióban értékeljük adatainkat (pl. milyen tendenciák láthatóak), magyarázzuk meg mik okozzák vagy okozhatják az eltéréseket, a változásokat. Hasonlítsuk össze eredményeinket egymással és az irodalomban fellelhető eredményekkel, hipotézisekkel és elméletekkel. Ne rejtsük véka alá az ellentmondásokat, a hibákat és a befolyásoló tényezőket sem, mert az szándékos félrevezetésnek számít. Fejtsük ki, hogy eredményeink milyen hatással vannak egy adott részterületre, esetleg jelöljünk ki további kutatási területeket, amelyeket munkánk inspirálhat. Ezt mindenféleképp csak az utolsó bekezdésben tegyük, amikor már befejeztük az elemzést.

A megalapozott következtetések levonása a tudományos tevékenység egyik legnehezebb és legkényesebb része. Tökéletesen ismernünk kell hozzá módszereink korlátait és hibáit, az alkalmazott statisztikákat és az általunk vizsgált biológiai jelenséget vagy élőlényt. Mindennek sajnos ritkán sikerül eleget tenni, de célunk kell hogy legyen szakmai színvonalunk állandó emelése. Ezzel együtt fog mozogni közleményeink színvonala is. Legfontosabb, hogy ne vonjunk le több következtetést, mint ami az eredményekből következik. Természetesen kevesebbet sem érdemes levonni, mert akkor saját értelmi képességünkről és hozzártésünkről állítunk ki rossz bizonyítványt. Fektessünk gondot arra, hogy a bizonyított és a spekulatív konklúziók világosan elváljanak egymástól.

A diszkussziók másik jellemző hibája, ami egyébként szorosan összefügg a megalapozott következtetések problémájával, a túlzott általánosítás. Gyakori, hogy egy élőlénynél kapott eredményeket kritikátlanul érvényesnek tüntetjük fel a rokon fajokra, sőt az élővilágra. Ez elképzelhető lehet önmagában, de ennek az általánosításnak a megalkotásához nagy szakértelem és ismerethalmaz szükséges.

6.6.9. Köszönetnyilvánítások

Ebben a részben köszönjük meg azoknak a munkáját, akik hozzájárultak az adott tudományos munkához, de a szerzőség feltételeinek nem tettek eleget (konzultáns, illusztrátor, műszert, vegyszert, speciális tudást adó személy, vagy aki jelentős kritikai észrevételekkel segített a közlemény megírásában). Némely cikk vagy könyv köszönetnyilvánításában található néhány komolytalanabb mondat: pl. Hálás köszönetem Jane-nek, feleségemnek, aki türelmesen elviselte a könyv megírásakor tartó megpróbáltatásokat és megfelelő mennyiségű sörről is gondoskodott. Ezt a stílust lehetőleg ne kövessük, mert a tudományos közleménynek ez a része is ugyanolyan komoly, mint a többi.

Mivel a kutatás pénzkérdés is, okvetlenül nyilvánítsunk köszönetet azoknak a szervezeteknek, amelyek akár pénzügyi segítséget nyújtottak munkánk elvégezéséhez (project

támogatás vagy ösztöndíj), akár lehetővé tették valamilyen felszerelés vagy földterület kedvezményes használatát.

6.6.10. Irodalomjegyzék és hivatkozások

A tudományos közleményben háromféle állítást használhatunk:

1. Már alapvetőnek számító tény (pl. *A túzok kakasok dürgőhelyükön vonzzák a nőstényeket*). Ezt az állítást nem kell alátámasztanunk, mert ez az ismeret ma már bekerült a tágabb szakmai tudás evidenciái közé. Ezt az információt mindenki tudja, vagy egy alaptankönyv segítségével könnyen elsajátíthatja.

2. Saját állítás (pl. *Az öreg túzokkakasok szaporodási sikere nagyobb a fiatal kakasokénál*). Ezt a kijelentést támasztjuk alá saját eredményeinkkel, amelyeket tesztelünk és valamilyen formában (pl. ábra és statisztikai teszt) prezentálunk.

3. Irodalmi hivatkozás, vagy más forrásból származó állítás. Ezt az állítást ill. információt irodalmi hivatkozással támasztjuk alá (pl. *A fiatal túzokkakasok alternatív párzási stratégiája a dürgőhelyekre érkező tojók erőszakos megtermékenyítése* (Raper és Bustard, 1994)). Ilyen módon ez ugyanúgy ellenőrizhetővé válik, mint saját állításaink, hiszen mi is kikereshetjük az adott irodalomban közölt eredményeket.

A szövegben általában csak rövid hivatkozásokat, ú.n. citálásokat használunk, hogy ne törjék meg az olvasást, és az ismétlődések elkerülése érdekében helyet takarítsanak meg. A leggyakoribb citálási rendszer a Harvard rendszer, ahol zárójelben az állítás után a szerző nevét és a közlemény évszámát tüntetik fel. Két szerzőnél többet nem írunk ki. Ha ennél több írta a közleményt, akkor mint munkatársakra hivatkozunk a következőképpen: (Watson és mtsai. 1990). Az irodalomjegyzékben a folyóiratok neveit csak akkor rövidítsük, ha azt pontosan tudjuk.

A teljes referenciát az irodalomjegyzékben közöljük (az adott folyóiratban lefektetett szabályok szerint) pl.:

Cikk esetén:

DENEUBOURG, J. L. & GOSS, S. (1989). Collective patterns and decision making. Ethology, Ecology and Evolution **1**, 295-311.

Könyvfejezet esetén:

DENEUBOURG, J. L., THERAULAZ, G. ÉS BECKERS, R. (1992). Swarm made architecture. In: Toward a Practice of Autonomous Systems (Varela, F. J. & Bourgine, P. eds.). Proc. of the ECAL'91 Conference. Cambridge: The MIT Press, 112-133.

Bármely más közleményt (pl. disszertáció, teljes könyv) hasonló módon referáljunk. A folyóiratok a referálás pontos módját közlik a potenciális szerzőkkel általában a folyóirat belső borítólapján.

Az irodalomjegyzéket általában az első szerzők szerinti ABC sorrendbe kell rendezni. Néha ugyanazon szerző ugyanabból az évből származó több közleményét is idézni szeretnénk. Ekkor ezeket az évszám után tett kisbetűvel különböztetjük meg (pl. Newt 1990a, 1990b). Néha a szerkesztők számozási rendszert követelnek meg, ilyenkor a hivatkozásokat első előfordulásuk szerint számozzuk. A hivatkozás ismétlődés esetén megtartja az első alkalommal kapott számát. A hivatkozások a számozás sorrendjében, ritkább esetben ABC sorrendben kerülnek be az irodalomjegyzékbe.

Az irodalomjegyzék a tudományos közlemények azon része, ahol a formalizmus a leginkább uralkodik, ugyanakkor a különböző folyóiratok irodalomjegyzékei még nem

egységesek. A szerkesztők nagyon ügyelnek arra, hogy az irodalomjegyzék megegyezzen a kívánt formával, és ne tartalmazzon olyan munkát, amire nem utaltunk a közleményünkben. Ez nem csak a kiadvány egységes képe és a korrekt tudományos publikálás miatt szükséges, hanem azért is, mert az irodalomjegyzékek további procedúrákon és kimutatáson mennek végig, amikor a munka már megjelent (pl. scientometriai feldolgozás).

6.6.11. Függelék

A függelék tartalmazza a cikk megértése szempontjából egyéb fontos információkat. Ne rakjunk be ide lényegtelen alaptáblázatokat vagy hosszú szöveget. Itt általában azon információk kapnak helyet, amelyek az olvasás lendületét vagy a logikai láncot megtörték volna. Ezért rájuk az eredmények részben csak utalunk pl (Függelék II). Általában egyenletek levezetései, rövidítések jelei (pl. rovarfajok nevei) és túl nagy táblázatok szerepelnek. Csak akkor használjunk függeléket, ha tényleg szükséges, és igyekezzünk itt is tömörek lenni.

6.7. A kézirat általános formai követelményei

Ha már eldöntöttük, hogy mit, miért, hol, kiknek és hogyan szándékozunk közölni, még ekkor is rengeteg apróság és gyakorlati probléma marad, amelyek miatt kéziratunkat könnyen elutasíthatják, vagy jelentősen késhet megjelenése. Ilyen például a gépelés, a táblázatok, az ábrák és fényképek elkészítése.

6.7.1. Gépelés

A kéziratot A/4-es fehér papírlapokra gépeljük. A gépelésnek vagy printelésnek tisztának, élesnek, feketének vagy sötétkéknek kell lennie. Legjobban ajánlható erre a célra egy lézerprinter. Ennél a pontnál két további eset fordulhat elő. Előfordulhat, hogy ú.n. 'camera-ready' kéziratot kell készítenünk. Ekkor a szerkesztő pontosan megad minden adatot arra nézve, hogy kéziratunk milyen formátumú legyen. Ekkor az ábrákat és táblázatokat is nekünk kell beszerkeszteni a szövegbe. Az elküldött kéziratot lefényképezik (esetleg kicsinyítik) és így sokszorosítják. A kézirat külleméért a szerző vállalja a teljes felelősséget.

Általánosabb az, hogy egy nyomdának készítjük a kéziratot. Ekkor teljesen más az eljárás. A kéziratot dupla sorközzel gépeljük le 12-es betűnagysággal. Valamilyen jól olvasható betűtípust (pl Courier, Times, Helvetica) válasszunk. Táblázatot ne gépeljünk proporcionális betűtípussal (ilyen a Times is), mert sok problémánk lesz az elcsúszásokkal. Használjunk itt inkább nem proporcionális betűtípust (pl. Courier).

Hagyjunk a lap minden oldalán legalább 2.5 cm szélességű margót, ahová a javítások kerülnek majd fel. Ily módon egy oldalra 28-30 sor, soronként 60-65 betűhely fér el. A papírnak csak az egyik oldalára írjunk. Az új bekezdést 4-6 betűhelynek megfelelő behúzással kell kezdeni. Lehetőleg csak a mondatkezdéshez használjunk nagybetűt. Kerüljük a többi betűtípus (pl. dőlt, kövér) alkalmazását is, hacsak a szerkesztő ezt külön nem kéri. Jusson eszünkbe, hogy egy nyomda számára készítjük kéziratunkat, ahol a fejezetcímeket, bekezdéseket a megfelelő módon tipizálni fogják.

A kézirat lapjait az első oldal kivételével megszámozzuk. Az elkeveredés megakadályozása érdekében célszerű az oldalszámhoz fejszöveget fűzni, ami minden oldalon állandó (pl. *'Kovács & Réti -11-'* és/vagy *'Túzok tojás méret -12-'*, ahol a számok az oldalszámokat jelentik, a páratlan oldalakon a szerzők a párosokon a rövid cím található. Az egyes fő fejezeteket célszerű új oldalon kezdeni. Az első oldal általában a címoldal, csak a közlemény címét, a szerzőket és munkahelyüket tartalmazza. Esetleg néhány egyéb rövid

információt is megad. A második oldal általában az összefoglalás. Így tehát a cikk bevezetése a harmadik oldalon kezdődik.

Folyamatosan gépeljünk. A táblázatokat, ábrákat és fényképeket ne rakjuk be a szövegbe, és ne is hagyjunk ki üres helyet a számukra. Ezek beszerkesztése a nyomda feladata. Mi csak utalást tegyünk a margóra, hogy ezek az egységek hová kerüljenek. Mindezeket az egységeket külön kezeljük a szövegtől, minden egyes ábrát és táblázatot külön lapra szerkesztünk és a szövegtől függetlenül számozunk. Az ábraaláírásokat külön lapon mellékeljük, mert ezeket máshogyan formázzák, mint a szöveget és az ábrákkal össze fogják szerkeszteni. Előfordulhat, hogy mástól idézünk hosszabb szöveget, vagy átveszünk ábrát. Ilyen esetekben írásos engedélyt kell kérnünk a kiadói jog tulajdonosától!

6.7.2. Számok és mértékegységek

Mondatot lehetőleg ne kezdjünk számmal, mert a mondatok összefolynak. A mondat belsejében a tíznél kisebb számokat általában betűkkel kiírják. Néha a folyóiratok megkövetelik, helytakarékossági okokból, hogy ne írjuk betűkkel a számokat. Ne írjuk betűvel a számokat akkor sem, ha mérés útján kapott eredményünket írjuk le, vagy ha tizedes számokról akarunk szólni. Kerüljük a betűvel való számleírást akkor is, ha számszerű eredményeket hasonlítunk össze.

A számok írásánál lehetőleg ne a magyar, hanem az angol szabványt kövessük, azaz tizedeseket ponttal, az ezreseket vesszővel különítsük el (pl. 456,555.3). Általánosságban az a szabály adható, hogy annyi tizedesre kerekítsünk, hogy csak az utolsó számjegyünk legyen hibával terhelt. Ellenkező esetben megtéveszjük az olvasót. A tizedes számoknál a nullákat is írjuk ki (pl. 23.400), mert nemcsak a pontosságot közöljük tévesen, de megnehezítjük az értékek áttekinthetőségét is.

A számítási műveletek jelei előtt és után szóközt kell hagyni. Vigyázzunk arra, hogy a mínusz és kötőjelet ne lehessen összekeverni. Mindíg 0-t és 1-t írjunk O és l helyett, ha erre írógépünk lehetőséget ad. Mértékegységek jelölésekor a nemzetközi SI-rendszert kell követni. Törtek helyett inkább negatív kitevőket haszbáljunk (pl. $g * s^{-1}$).

6.7.3. Táblázatok

Adatainkat és eredményeinket gyakran jól leírhatjuk folyószöveggel, azonban ez nagyon nehézkessé válik, ha több dolgot szeretnénk összehasonlítani. Ekkor használunk táblázatot. Fontos, hogy ne próbáljuk meg szöveggel is leírni a táblázatot, hiszen azt mindenki láthatja. Koncentráljunk a szövegben csak néhány dolog kiemelésére (lényeges összefüggések, tendenciák, kilógó értékek).

A táblázat szerkesztésénél könnyen elkövethetünk néhány jellemző hibát. A legjellemzőbb a túl nagy táblázat. Ez úgy keletkezhet, hogy feldolgozott adataink mellett az alapadatokat, vagy egy kevéssé feldolgozott adattömeget is bemutatunk. Ezt ne tegyük, mert úgysem fogja senki végigböngészni. Túl nagy táblázat keletkezhet úgy is, hogy rengeteg eredmény próbálunk bezsúfolni egy óriási táblázatba. Ezen viszont nem tud majd eligazodni senki. Ezért nagyon gondoljuk át, mi az amit feltétlenül táblázatban célszerű közölni, és hogy hány kisebb táblázatra tudjuk ezt szétszedni. A kisebb táblázatok megalkotásánál néha rájövünk, hogy ezt a táblázatot akár el is hagyhatjuk pl:

1. Táblázat: A sivatagi faundorkák összehasonlítása.

Faj	Élőhely	Testnagyság	Párzási rendszer	Peteszám
Rozsdalábú faundorka	sivatag	2 cm	monogámia	10
Aranylábú faundorka	sivatag	2 cm	monogámia	20

Ilyen esetben sokkal ésszerűbb, ha folyószöveggel fejezzük ki mondanivalónkat. A táblázat közlése helyett a következőt írjuk: 'Az Aranylábú faundorka, bár élőhelyét (ezt már valószínűleg közöltük az Anyag és módszerek részben), párzási rendszerét (monogámia) és testnagyságát (2 cm) tekintve teljesen megegyezik a Rozsdalábú faundorkával, kétszer annyi petét (20) tojik'. Ez a forma sokkal rövidebb és a nyomda számára olcsóbb, mint a táblázatos forma.

Célszerű, ha a táblázat nem áll 4-5-nél több oszlopból és ezek sorrendje valamilyen logika szerint épül fel. Ezek fejlécében tüntessük fel a változók neveit és a sorokba rakjuk azokat az objektumokat, amelyeket össze akarunk hasonlítani. A táblázatot is kettes sorközzel gépeljük. Ügyeljünk arra, hogy a tabulálás tökéletes legyen, azaz a tizedespontok egymás alatt legyenek. Tehetünk a táblázatba különböző jeleket, amelyek segítenek bizonyos eredmények kiemelésében. Ha csak néhány értékünk van, de az gyakran ismétlődik, akkor azt célszerű egy egyszerűbb jellé kódolni. A statisztikai táblázatoknál pl a 'p < 0.05' helyett *; a 'p < 0.01' helyett ** és a 'p < 0.001' helyett *** jeleket írnak be a táblázatba. Ez nemcsak helyet takarít meg, de az áttekinthetőséget is nagyban növeli. Kéziratunkhoz minden táblázatot külön lapon csatolunk az 'Irodalomjegyzék' vagy a 'Függelékek' után.

6.7.4. Ábrák, grafikonok és diagramok

Elvileg táblázat formájában minden eredmény közölhető lenne, de néha nagyon sok adatunk van és nem ezek pontos értéke, hanem elsősorban a trendje érdekel bennünket. Ekkor használunk valamilyen ábrát (ami jelentse ezentúl a címben jelzett összes nem-táblázatos formát, mivel ezek között lényegi különbség nincs). Az ábra ekkor kevesebb helyet is foglal és sokkal szemléletesebb. A trendek összehasonlítása is sokkal könnyebb. Ne készítsünk ábrát arról, amit már táblázaton bemutattunk és fordítva! Ezért egy adott eredménynél gondoljuk végig, hogy pontosan mit szereténk bemutatni és mi célból. Ha nem muszáj ne használjunk ábrát, mert nyomdai költsége nagy, vagy próbáljunk összevonni több ábrát eggyé. Ezt megcsinálhatjuk úgy is, hogy azonos kordinátarendszerben ábrázolunk több görbét, vagy pedig alábrákat készítünk, ahol egy ábraaláírás felett pl. több grafikon foglal helyet. Ezeket ekkor az ABC kisbetűivel jelöljük pl. 4b ábra.

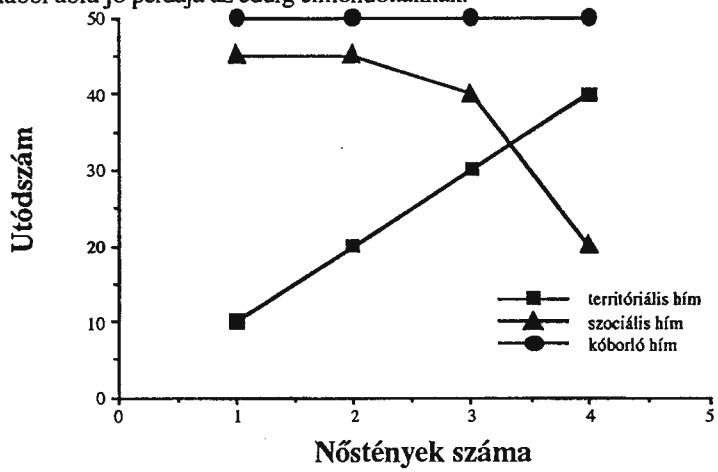
Az ábrák elkészítésére fordítsunk nagy gondot, mert sokkal nehezebb javítani őket, mint a szöveget. Régebben az volt a kívánatos, hogy az ábrákat minőségi pauszpapírra rajzolták csőtollal különféle sablonok segítségével. Ez a megoldás ma is megfelel a legrangosabb folyóiratoknál is. Legtöbb helyen már lehetőség van arra, hogy A/4 es fehér lapon lézer printerrel nyomtassunk egy számítógép segítségével rajzolt ábrát. Ez könnyebben elkészíthető és módosítható, és legtöbbször elfogadják.

Törekedjünk arra, hogy az ábra tökéletesen áttekinthető és magától értetődő legyen! Lehetőleg minél kevesebb szöveget írjunk az ábrába. Használjunk inkább jeleket és fejtsük ki jelentésüket az ábraaláírásban, ami elég hosszú is lehet. Ne lépjük azonban semmiképpen túl az átlagos bekezdés hosszúságát. Mindenféleképpen próbáljuk az ábrát olyan egyszerűre készíteni, ahogyan lehetséges. A túlbonyolított, háromdimenziós megdöntött perspektívikus ábrákat számítógéppel könnyen előállíthatjuk, de néha a legjobb nyomda sem tudja megfelelő minőségben reprodukálni.

Mindíg ügyeljünk arra, hogy össze ne keverjük a független és a függő változókat az ábrázoláskor! A tengelyfeliratokat és a tengelyskálákat igyekezzünk minél nagyobb betűkkel, számokkal feliratozni. Ahol lehet mindenütt válaszunk robosztusabb vonaltípust és jeleket. Erre azért van szükség, mert az ábra a folyóiratokban sokkal kisebb alakban (1/2 - 1/8) fog megjelenni, mint ahogy mi leadjuk a nyomdának. A kicsinyítés során a túl kicsi jelek könnyen összemosódnak, vagy eltűnhetnek. Szintén nyomdatechnikai okokból igyekezzünk négyzetet minél inkább megközelítő ábrákat tervezni. Célszerű az ábrát ellenőrzésként negyedére

fénymásolóval lekicsinyíteni, hogy fogalmat kapjunk publikált változat megközelítő nagyságáról és kivehetőségéről.

Az alábbi ábra jó példája az eddig elmondottaknak:



6.1. ábra Különböző tipusú töppedt fülű denevér hímek átlagos utódszáma a háremnagyság függvényében.

Az ábra szerkesztése megfelelő, a trendek jól követhetők és az ábraaláírás is rövid és tömör. A szövegben nyilván ki van fejtve a megfelelő helyen, hogy az egyes hímtípusok pontosan mit jelentenek, ezért az itt nincs részletezve. Az állat fajneve nyilván azért szerepel, mert a közleményben több fajjal foglalkozik a szerző. Ha csak egy fajról van szó akkor a fajnevet célszerű elhagyni. A skálákat célszerű úgy megválasztani, hogy csak az ábrázolni kívánt tartományt mutassák. Ebben az esetben nulla nőstény esetén az utódszám nulla lenne, azonban a nulla nőstényszám nem értelmezhető ebben a vizsgálatban mint háremnagyság, ezért ezzel a vizsgálat nem foglalkozik. Abban az esetben, ha más más ábrákon vagy alábrákon lévő görbéket is össze akarunk hasonlítani, akkor használjunk azonos skálát mindre. Célszerűen az összes eset minimális és maximális értéke közé válasszuk minden grafikon beosztását. Így nemcsak az összehasonlítás könnyű, de megtartjuk a lehető legnagyobb felbontást is. Ne próbáljuk manipulálni a trendeket skálák összenyomásával és széthúzásával, mert csak magunkat tévesztjük meg vele, ezen kívül rossz fényt vet ránk.

Problémaként merül fel e mintaábrában az is, hogy a nőstények száma csak egész szám lehet. Így a köztes értékeknek nincs értelmük. A vonalas grafikon bár nagyon szemléletesen mutatja itt a trendet, mégis korrektebb más ábrázolási módot alkalmazni, például oszlopgrafikont.

6.7.5. Rajzok és fényképek

Fényképeket a tudományos folyóiratokban főleg azon tudományterületek közölnek, ahol ez nélkülözhetetlen (pl. sejttan), máshol ezeket mellőzni igyekeznek, mert reprodukálásuk igen költséges és elég bonyolult. Sok orgánumban ki is kötik, hogy fényképek (vagy csak a színes fényképek) közléséért mennyi anyagi hozzájárulást kérnek a szerzőtől. Több fényképet ú.n. táblává kell összeszerkeszteni, ami egy szigorúan megszabott dimenziókkal rendelkező speciális oldal. Itt a fényképeket a tökéletes térkihasználás elve alapján a szerkesztői utasítást szigorúan betartva kell elkészíteni.

Lehetőleg ne használjunk fényképes prezentációt. Élőlények, ezek élőhelyének látképe, vagy vizsgálati eszközök fényképeinek leközlése ma már nem szokásos. Ha mindenképpen

fontos bemutatni valónk van, rajzoljunk inkább vonalas rajzot. A vonalas rajzra nagyjából ugyanazok a szabályok vonatkoznak, mint az ábrára. Fontos a minél egyszerűbb és szemléletesebb megjelenítés.

6.8. Publikációs gépezet

Évek hosszú munkájának gyümölcse, "tökéletesen megírt" kéziratunk ott fekszik előttünk. Ez azonban még csak annyit jelent, hogy önmagunk számára tudásunk és eredményeink egy részét az adott témáról kifejtettük. Sajnos a dolog ezzel korántsem ért véget, még hosszú időre való munkánk lehet hátra, amelyek a későbbiekben felmerülnek. Mostani dolgozatunkat nyugodtan tekinthetjük egy alapnak, ami sokat fog még változni mire a kinyomott anyagot kezünkbe foghatjuk.

6.8.1. Előzetes lektorálás

Kéziratunk első változatáról készítsünk több példányt és próbáljuk rásózni azokra az általunk személyesen is jól ismert pályatársainkra, akinek a véleményére lehet adni. Kérjük meg őket, hogy olvassák el és írják le véleményüket, javaslataikat. Biztassuk őket, hogy nyugodtan firkálják össze az egészet. Külföldi barátainknak is nyugodtan elküldhetjük ezeket, de csak olyan embereket szemeljünk ki erre, aki hasonló témával foglalkozik, így nem érzi majd akkora nyűgnek ezt az elég nagy munkát. Szervezzünk emellett munkahelyi szemináriumot, ahol elmondjuk eredményeinket munkatársainknak. Hallgassuk figyelmesen miket kérdeznek és mit nem értettek. Mindíg az lebegjen előttünk, hogy valószínűleg mi voltunk a hibásak a félreértésekért, nem a hallgatóság. Sajnos kiderülhet az is, hogy teljesen hibás úton jártunk, vagy valamit elrontottunk. Gondoljunk végig minden kritikai észrevételt és amit jogosnak érzünk, azt jegyezzük fel.

Ezután tegyük el az összes feljegyzést és kéziratot valamilyen fiók mélyére, amíg a kiküldött kéziratok bírálatai meg nem érkeznek. Célszerű, ha ezalatt az idő alatt valamilyen más problémán rágódunk, mert így kiesünk azokból a kényszerpályákból, amin gondolkodásunk eddig haladhatott. Ha minden bírálat együtt van, vegyük elő az összeset és javítsuk ki vagy írjuk át a régi kéziratot. Természetesen nem kell minden javítást elfogadnunk, mert mindenki tévedhet, vagy máshogy láthatja a problémát.

Miután elkészítettük kéziratunk második "tökéletes " változatát, másoljuk le annyi példányban, ahányat az adott folyóirat szerkesztősége megkíván (ez általában 3-4 példány), plusz magunknál is tartsunk mindíg egy teljes kéziratot. Ezután a szerkesztőnek címzett kísérőlevelet kell megírnunk. Ennek a következőket kell tartalmaznia:

- Szerkesztő neve és címe,
- A feladó neve és címe,
- Mi a kézirat címe és kik a szerzői,
- Mely orgánumban szeretnék közölni a kéziratot,
- A kézirat "állapota": világosan le kell írni, hogy ez új kézirat, már egyszer visszakapott javított kézirat visszaküldése, ellenőrzött kefelenyomat stb.
- Melyik szerzőnek kell küldeni a kézirattal kapcsolatos levelezést és hová.

Amíg a hatályos törvények ezt előírják, szerezzük be a kiviteli bankengedélyt, nehogy az engedély hiányában kéziratunk a határon "elvesszen".

6.8.2. Tudományos lektorálás

Amint a tudományos orgánum szerkesztője megkapja kéziratunkat, átnézi abból a szempontból, hogy az beleillik-e az adott folyóirat célkitűzésébe és tematikájába. Ha nem így találja, kategórikusan visszaküldi nekünk az egész anyagot. A szerkesztő megvizsgálja kéziratunkat formai szempontokból is, azaz arra kíváncsi, hogy betartottuk-e az általános és a folyóiratra speciális formai szabályokat. A kéziratot azonnal visszaküldi, ha ezeket nem találja kielégítőnek, azonban újraformázás után a kéziratot ugyanide nyugodtan visszaküldhetjük.

Ha a szerkesztő mindent rendben talál, akkor a cikk szűkebb témája alapján kijelöli azt a két vagy három neves kutatót, akit felkér a kézirat lektorálására. Általában az egyik ezek közül egy nagy szaktekintély a mi részterületünkön belül, a másik személy pedig egy nagyobb általános áttekintéssel bíró kutató. A lektorálásra való felkérés nagy megtiszteltetésnek számít, ezért a felkért személyek ezt elvállalják és kellő alapossággal el is végzik (számukra, ahogy a szerkesztő számára is ez a munka nem jár pénzügyi juttatással).

A lektorok egy nevüket nem tartalmazó jelentésben beszámolnak arról, hogy az adott kéziratot értékesnek tartják-e és milyen hibákra bukkantak, amelyek súlyossága alapján a kéziratot lényegében három kategóriába sorolják be:

1. Azonnal közölhető értékes mű.
2. A javasolt javítások után esetleg közölhető.
3. Nem közölhető.

A jelentést közvetlenül a szerkesztő kapja. Ő felülbírálja ezeket a lektori véleményeket, esetleg újakat is kérhet, majd eljuttatja hozzánk a saját és a lektorok véleményét és határozatát. Ha kéziratunkat azonnal közölték boldogok lehetünk, ez nagyon ritkán fordul elő. Ha kéziratunkat nem közlik, akkor két lehetőségünk van:

1. Átdolgozzuk, további méréseket végzünk stb.
2. Ugyanezt a kéziratot átformálva elküldjük másik folyóirathoz.

Ha javításokat javasolnak, azt tegyük meg, vagy részletesen indokoljuk, hogy mégis miért nekünk van igazunk (lehet, hogy elfogadják, és ez lehet bizonyos esetben az egyetlen megoldás). Minél hamarabb küldjük vissza a javított kéziratot az eredetivel együtt, hogy ellenőrizni tudják mit javítottunk. Ezenkívül egy külön levélben minden kérdést és javítást pontosan le kell közölnünk.

6.8.3. A kézirat nyomdai útja

Javításaink elfogadása után a szerkesztő besorolja a megfelelő kötetbe kéziratunkat és átadja a munkát a technikai szerkesztőnek. A technikai szerkesztő ismét mindent leellenőriz formai szempontokból. Különösen ügyel a nyomdai költségek csökkentésére. A legdrágább a fénykép, majd az ábra, táblázat és szöveg. Megvizsgálja azt is, hogy a szerző megfelelően prezentálta-e eredményeit, nem lehetne-e olcsóbb formát választani (pl. bizonyos ábra helyett folyószöveg). Ha valami kirívót talál azt velünk közli és nekünk arra megfelelően reagálnunk kell, mert addig közleményünk nem kerül nyomdába.

Ha a technikai szerkesztő végzett munkájával, kéziratunkat elküldi a nyomdának. A nyomdák különböző hosszúságú átfutási idővel dolgoznak, amit kiszámíthatunk az elfogadás dátumából (ezt sokszor a közleményeken a prioritás miatt feltüntetik) és a folyóirat megjelenésének dátumából. Ez általában 3-6 hónap. Ezalatt a kéziratot szedik és összeszerkesztik. A végleges nyomás előtt kefelenyomatot (proof) készítenek, amit a szerkesztő nekünk javításra legtöbbször elküld. Ezen már csak a betűhibákat és a nyomda hibáit szabad javítani, mert máskülönben vagy fizetnünk kell, vagy esetleg kizárják prezentációnkat a publikálásból. Különlegesen fontos információt utólag közölhetünk néhány sorban, mint "notes added in proofs".

A kefelenyomattal együtt érkezik egy kérdőív arról, hogy hány külön példányt (különlenyomat) rendelünk művünkből. Általában 25-50 példányt ingyen, minden további példányt 2$ körüli áron adnak. Ezek a példányok szolgálnak arra, hogy másoknak munkánkat elküldhessük, mivel a nyomdai termékek fénymásolása a szerzői jogokat sérti (ez ekkor már a kiadót illeti). A kefelenyomatot és a kérdőívet gyorsan vissza kell küldeni. Ezután 1-2 hónap múlva várható munkánk megjelenése a folyóiratban és további 3-6 hét múlva megkapjuk a különlenyomatokat is.

6.9. Számítógépes információhálózat

A tudományos eredmények közzétételének jövője elég jól körvonalazható. A hosszú nyomdai átfutás és a magas nyomdai költségek miatt célszerű lehetőségként merült fel a közlemények elektronikus úton való terjesztése. A nemzetközi számítógéphálózatok ma már a legtöbb közepesen fejlett országban is elterjedtek. A kutatók által intenzíven használt elektronikus posta sikere azt jelzi, hogy ez a módszer mindenkinek megfelelő lehet. Már eddig is nagy mennyiségű, elsősorban kevésbé formális információ jutott el a kutatókhoz ezeken a csatornákon keresztül. Az adatbankok könnyű és gyors elérhetősége is nagy lehetőségeket nyújt.

Mindmáig nem megoldott azonban a szigorú ellenőrzés. Az interaktívan felhasznált információk szerzői jogvédelme is nehézségekbe ütközik. Ezek és bizonyos konzervativizmus erősen gátolja a számítógépes tudományos folyóiratok és könyvek elterjedését, holott a feltételek már évek óta adottak. Az elektronikus úton eljuttatott információk több félék és összetettebbek lehetnek a papíron írottnál, mivel a szövegen és ábrákon kívül hangokat és interaktív programokat is beleágyazhatnak a közleménybe.

Magunk részéről azt javasoljuk, hogy egyenlőre az írott orgánumokat használjuk, mint publikálási formát, de erősen figyeljünk az elektronikus sajtó fejlődését és időben kapcsoljunk át rá. Addig is használjuk intenzíven az elektronikus posta szolgáltatásait és segítsük munkánkat a számítógép nyújtotta lehetőségekkel!

6.10. Néhány alapvető felhasználói program alapismérve

Miért használjunk számítógépet munkánk során?

Két okból:

1, Nagyon sok dolog (amit sokszor a publikálásnál megkívánnak pl. bizonyos többváltozós statisztikai tesztek, összetettebb modellek) már nem igazán oldhatók meg számítógép nélkül.

2, A számítógép és szoftvereinek megtanulása sokszorosan visszatérül, így rendkívül sok időt és energiát spórolunk meg magunknak.

A következő részben ajánlunk néhány felhasználói programot, amelyek tudományos munkánkban és a prezentációkban nagyon hasznosak. Ezek, vagy valamely változatuk a legtöbb személyi (PC) vagy Macintosh számítógépen elérhetők. Célszerű, ha először valamilyen egyszerűbb változattal ismerkedünk meg. Ennek az az előnye, hogy akár félóra múlva már érdemben tudjuk használni. Ha már érdemben tudunk a számítógéppel dolgozni akkor célszerű mindíg a lehető legmodernebb változatot beszerezni az adott szoftverből, mert a szoftverek állandóan fejlődnek és egységesebbé válnak. Ilyen módon, ha egy modern táblázatkezelőt ismerünk, akkor egy rajzolóprogram megtanulása során sem a nulláról kezdünk. Ne sajnáljunk beszerezni néhány segédkönyvet erre a célra, mert gombnyomogatással a szoftver sok értékes tulajdonságára nem jövünk rá. A legcélszerűbb és egyetlen törvényes megoldás a kiszelmelt szoftver megvásárlása.

Ez a fejezet nem kíván részletes leírást és használati kézikönyvet nyújtani az egyes szoftverekhez, hanem tájékoztatót ad a főbb felhasználói programok néhány lehetőségéről. Remélhetőleg ez kedvet ébreszt a számítógépek intenzív használatához és segít a megfelelő szoftver kiválasztásában és használatában.

6.10.1. Szövegszerkesztők

A szövegszerkesztő programokkal ma már könnyedén tudunk nyomdai minőségű iratokat is készíteni. Fő előnyük azonban az, hogy az egyszer begépelt szöveg tárolható és bármikor újra elővehető és módosítható. Elvileg akár hibátlan szöveget is készíthetünk (amit írógéppel szinte sohasem) mivel a legtöbb szövegszerkesztőhöz betűzés ellenőrző (spell check), szinonima szótár (thesaurus), sőt néha nyelvtani ellenőrző rutin is jár. A szövegszerkesztő a szöveget optimalizálja, így nekünk tördelnünk sem kell. Könnyen választhatunk viszont számos betűtípus és bekezdésformátum között. Általában képek beszerkesztése és táblázatok készítése is rutineljárássá válik egy jobb szövegszerkesztővel.

Okvetlenül egy olyan szövegszerkesztőt használjunk, ami széles körben elterjedt pl. Microsoft Word, Word Perfect vagy AmiPro. Előfordulhat, hogy másutt akarjuk szövegüket szerkeszteni vagy kinyomtatni, mint ahol begépeltük. Ekkor könnyebben megtalálhatjuk az általunk ismert szövegszerkesztőt, vagy olyat, ami képes szövegünket baj nélkül konvertálni vagy kezelni. Ha külföldre megyünk okvetlenül vigyük magunkkal a magyar karaktereket kezelő segédprogramokat!

6.10.2. Táblázatkezelők

Régen adatainkat jegyzőkönyvbe gyűjtöttük, majd táblázatba rendeztük őket kockás papíron, és ezután hetekig osztottunk szoroztunk, amíg rá nem jöttünk, hogy valamit már az elején elszámoltunk. Ekkor kezdhettük előről az egészet. A táblázatkezelők segítségével ezek nem problémák többé.

Minden táblázatkezelő oszlopokba és sorokba rendezett cellákból áll. Ezekbe a cellákba könnyen és jól áttekinthetően begépelhetjük az adatokat a jegyzőkönyvünkből. Ne számolgassunk, kerekítsünk és ne rendezzünk sorba stb., mert a táblázatkezelővel az alapadatok kezelése sokkal könnyebb, mint papíron. Több táblázatkezelőhöz adnak adatbáziskezelőt (pl EXCEL), vagy kompatibilis vele néhány adatbáziskezelő (pl. a Quattro képes használni a DBase -t). Így adataink bevitelét még könnyebbé tehetjük. Ebben az esetben megszerkesztünk egy kérdőív szerű munkalapot, amit kitöltünk. Általában csak az előző kérdőívhez képest történt változásokat kell begépelnünk, így rengeteg időt takaríthatunk meg. Az adatbázist lemezen tároljuk, belőle bármely változó alapján a kívánt adatokat kikereshetjük és ezt beolvashatjuk a táblázatkezelőbe.

Általános elv szerint az oszlopokban szerepelnek a változók (pl. tojásméret, fiókasúly stb.) a sorokban pedig azok az objektumok, amiknek a tulajdonságait felvettük (pl. szülőpárok, egyedek). Az oszlopok fejléce általában szöveges információt tartalmaz (pl. változó neve) alatta sorakoznak az értékek. Igen sok adat bevitelére van lehetőségünk: általában több száz oszlop és több ezer sor áll rendelkezésünkre. A cellák kitöltésében nagy segítség az, hogy lehetséges adattömegek másolására, átmozgatására és törlésére.

Az alaptáblázatunkat könnyen továbbmódosíthatjuk és rendezhetjük. Különböző kulcsok szerint (pl. a testnagyság szerint) sorbarendezhetjük az összes vagy csak a kiválasztott adatokat, vagy kigyűjthetjük egy adathalmazból a megadott kulcs alapján a nekünk szükséges adatokat. Bármelyik sor vagy oszlop mellé új oszlopokat szúrhatunk be, sőt több táblázatot kombinálhatunk vagy összeadhatunk. Könnyedén bármit kiszámolhatunk (pl. egy tojásindexet a mért alapadatok alapján) a táblázatok adatait felhasználva és a kiszámolt értéket megtartjuk, vagy a műveleti sort megtartva mindíg az aktuális új értéket kapjuk vissza Egy példa a Quattro-

nál: a b1 cellába érték helyett a következőt írjuk be: +a1*c1+z1, ami a következőt jelenti: az a1 és c1 cella tartalmának összeszorzása után az eredményhez hozzáadja a z1 cella értékét és ez az érték jelenik meg a b1 cellában. Ha sok ugyanilyen számolásunk van pl a1-től a321-ig, akkor nem kell az összes 320 cellába a műveletet beírni, hanem csak a megadott cellákba ezt bemásolni. A megfelelő értékek átállítódnak, tehát a b2 cellára az a2, c2 és z2 értékek lesznek érvényesek (hacsak másképpen nem döntünk, mivel az értékek bármelyikét fixálhatjuk is) és az összes érték egy pillanat alatt automatikusan kiszámolódik.

Nemcsak az egyszerű műveleteket vagy ezek kombinációját használhatjuk, hanem azokat (sokszor száznál is több) a függvényeket is, amelyet a gyártó a szoftverhez ad. Ezek nemcsak trigonometrikus és numerikus függvények, hanem a statisztikában, üzleti életben, naptárszámításokban stb. használt számítások is lehetnek. Megtalálhatók itt a logikai függvények és nevezetes állandók pl. a "pi" is. Ezek kombinációival gyakorlatilag minden kiszámolható, amit a papírtáblázatunkon kiszámoltunk volna.

Táblázatunkat a fentiek alapján a modellezéshez is segítségül hívhatjuk. számokkal A kitöltő funkció segítségével az oszlopokat könnyen és gyorsan feltölthetünk számokkal (pl. az idő megy 0-1000-ig : a1-a1001). Ezt mint függő változót használjuk modellezési munkánkban, ahol a populációnagyság növekedését nézzük az idő függvényében. Ekkor vizsgálhatjuk pl az $N_{(t+1)}=N*r$ modell alapján a populáció növekedését a következőképpen: d1 cella= N0; z1 = r; d2= d1*z1$ (a dollár jelek rögzítik a cellahivatkozást. A d2 cellát 1000-szer lemásoljuk (ez kb. 2 másodpercet vesz igénybe) és már vizsgálhatjuk is modellünk tulajdonságait. A paraméterek változtatása a z1 cella átírása után, a program automatikusan mindent újraszámol. Természetesen ennél sokkal bonyolultabb modellek is megalkothatók több paraméterrel, egymásba ágyazott függvényekkel és kölcsönhatásokkal. Az eredmények további feldolgozásához segítséget kapunk néhány hasznos szolgáltatással: pl. optimalizáló, exponenciális és lineáris illesztés stb.

6.10.3. Grafikon és ábrarajzolók

A legtöbb modern táblázatkezelő már nemcsak adatbáziskezelőt ad a táblázatkezelőhöz, hanem a grafikus megjelentetés lehetőségét is (pl. Quattro, Excel). Megfelelő nyomtatót használva nyomdai minőségű grafikák elkészítése is lehetséges táblázatunkból. Ha táblázatkezelőnk ábrákat nem tud rajzolni, akkor keresnünk kell egy kompatibilis grafikonrajzolót (pl. Boeing Graph vagy Plot).

A grafikonrajzolók működési elve elég egyszerű. A táblázatkezelő által elkészített táblázatunkban kijelöljük a függő változót tartalmazó oszlopot (vagy egy részét) és a független változót(zókat). Grafikont ebből a program a beállítás alapján automatikusan generál, ami aztán kinyomtatható, vagy file-ba elmenthető. Általában többféle alap grafikontípus kínálnak fel, amiket aztán magunk is módosíthatunk pl. átskálázással, a színek, minták és vonaltípusok átdefiniálásával. Megfelelő mennyiségű szöveg pl. tengelyfeliratok könnyű elkészítésére is van mód.

Az ábrarajzolók adatok nélkül dolgoznak, gyakorlatilag a szabadkézi vagy a műszaki rajz elkészítését segítik (pl. Corel Draw). Óriási előny itt is, hogy a rajz könnyen módosítható, vagy több rajz összekombinálható. Több segédeszköz könnyíti meg a rajzolást (sablonok, vonalvezetési stílusok stb). Művészi rajzok készítését is lehetővé teszi az, hogy a kép bármely része erősen kinagyítható és képpontonként rajzolható. Az ábra egésze vagy egy része könnyen másolható, elfordítható, dönthető vagy törölhető. Modern rajzolóprogramokkal a grafikonok, mint képek tovább módosíthatók.

6.10.4. Statisztikai programcsomagok

Sokszor nem elég az eredmények táblázatos vagy grafikus megjelenítése, hanem valamilyen statisztikai analízist is el kell elvégeznünk. Néhány egyszerűbb számolás és teszt könnyen elvégezhető a táblázatkezelők statisztikai függvényeivel, vagy kézzel, azonban a bonyolultabb analízisek esetén érdemes egy statisztikai programcsomagot használni (pl. SPSS, SAS, Statgraphics), mert a befektetést nagyon megéri.

A statisztikai programcsomagok általában tudják használni a táblázatkezelők file-jait, sőt ezekben kisebb változtatásokra, pl. rendezés vagy bizonyos adatok kizárása, is lehetőségünk van. Miután kiválasztottuk a megfelelő analízist (ehhez megfelelő statisztikai ismeretek szükségesek, amit a programcsomag nem tartalmaz) és a változóinkat, a program a beállításoknak megfelelően elvégzi az analízist és az eredményeket a képernyőn megjeleníti vagy file-ban eltárolja. Nekünk az analízis értelmezése marad, amihez nagy segítséget nyújtanak a statisztikai kézikönyvek (lásd irodalomjegyzék). Néhány statisztikai programcsomag grafikus ábrázolásra is képes, ahol a hisztogramok és diagramok megtekinthetők és kinyomtathatók.

7. Glosszárium

A magyar szakkifejezések angol megfelelői

2. fejezet	
blokk elrendezés	block design
faktoriális elrendezés	factorial design
független változó	independent variable
függő változó	dependent variable
ismétlés	replication
járulékos változó	supplementary variable
kísérlet	experiment
kísérleti elrendezés	experimental design
kísérleti alany	subject
kezelés	treatment
kontroll	control
latin négyzet	latin square
megfigyelés	observation
randomizálás	randomization
teljesen véletlen elrendzés	completely randomized design
tökéletes blokk elrendezes	randomized complete block design
tökéletlen blokk elrendezes	randomized incomplete block design
3. fejezet	
alsó kvartlis	lower quartile
arány skála	ratio scale
átlag	mean
átlag szórása	standard error of mean
binomiális eloszlás	binomial distribution
döntéshozó statisztika	statistical inference
egyoldalas próba	one-tailed test
elsőfajú hiba	Type I error
felső kvartilis	upper quartile
gyakorisági táblázat	frequency table
hipotézisvizsgálat	hypothesis testing
interkvartilis tartomány	interquartile range
intervallum skála	interval scale
kétoldalas próba	two-tailed test
kritikus érték	critical value
kvartilis ábra	box plot
leíró statisztika	descriptive statistics
másodfajú hiba	Type II error
medián	median
nominális skála	nominal scale
normáleloszlás	normal distribution
ordináls skála	ordinal scale
oszlopdiagram	histogram
próba ereje	power of a test
szabadsági fok	degrees of freedom

szignifikancia szint	significance level
szórás	standard deviation
törzsdiagram	stem-and-leaf plot
variancia	variance

4. fejezet

arcsin transzformáció	arcsin transformation
Bartlett-próba	Bartlett's test of homogeneity of variance
célváltozó	criterion variable
csoportok közötti összehasonlítások	comparisons among means
csoportok közötti variancia	variance among groups
csoporton belüli variancia	variance within groups
determinációs koefficiens	coefficient of determination
egymintás t-próba	one-sample t-test
előre nem tervezett összehasonlítások	unplanned comparisons
előre tervezett összehasonlítások	planned comparisons
eltérésnégyzet-összeg	sum of squares
F-eloszlás	F-distribution
F-próba	F-test
F_{max}-próba	F_{max}-test
hatóváltozó	predictor variable
kétmintás próba	two-sample test
kétmintás t-próba	two-sample t-test
kétutas varianciaanalízis	two-way analysis of variance
korrelációanalízis	analysis of correlation
korrelációs koefficiens	product-moment correlation coefficient
kovariancia-analízis	analysis of covariance
közepes négyzetösszeg	mean square
legkisebb négyzetek	least square
logaritmikus transzformáció	logarithmic transformation
magyarázott eltérésnégyzet-összeg	explained sum of squares
maradék eltérésnégyzet-összeg	residual sum of squares
meredekség	slope
négyzetgyök transzformáció	square root transformation
összes variancia	total variance
paraméteres próba	parametric test
parciális regressziós koefficiens	partial regression coefficient
páros t-próba	paired t-test
path-analízis	path analysis
path-együttható	path coefficient
path-séma	path diagram
regresszióanalízis	linear regression
regressziós koefficiens	regression coefficient
standartizált parciális regressziós koefficiens	standard partial regression coefficient
t-eloszlás	Student's t-distribution
tengelymetszet	interseption
többszörös determinációs koefficiens	coefficient of multiple determination
többszörös regresszióanalízis	multiple regression
Tukey-Kramer próba	Tukey-Kramer method
Tukey-próba	Tukey's test
varianciaanalízis	analysis of variance
varianciaanalízis feltételei	assumptations of analysis of variance
varianciák homogenitása	homogeneity of variances

Welch-próba	Welch-test
5. fejezet	
χ^2 próba	χ^2 test
egymintás előjelteszt	one-sample sign test
Fisher-féle exakt teszt	Fisher exact test
függetlenségvizsgálat	test of independence
homogenitásvizsgálat	test of homogeneity
G teszt	G test, log-likelihood ratio test
illeszkedésvizsgálat	test for goodness of fit
Kolmogorov-Szmirnov teszt	Kolmogorov-Smirnov one-way sample test
Kruskal-Wallis test	Kruskal-Wallis one-way analyses of variance by ranks
Mann-Whitney teszt	Mann-Whitney U test, rank sum test
nem-paraméteres próba	nonparametric test
páros előjelteszt	sign test for related samples
random előfordulási teszt	runs test
Spearman rang korreláció	Spearman rank correlation
Wilcoxon előjelteszt	Wilcoxon signed rank test
Wilcoxon páros előjelteszt	Wilcoxon matched-pairs signed rank test

Táblázatok

1. táblázat. Random számok 116
2. táblázat. A standard normál eloszlás valószínűségei 118
3. táblázat. A binomiális eloszlás valószínűségei 120
4. táblázat. A t eloszlás kritikus értékei 126
5. táblázat. Az F eloszlás kritikus értékei 127
6. táblázat. A Wilcoxon előjelteszt valószínűségi szintjei 133
7. táblázat. A Mann-Whitney próba kritikus értékei 140
8. táblázat. A Kruskal-Wallis próbastatisztika kritikus értékei 143
9. táblázat. A Spearman rang korreláció kritikus értékei 145
10. táblázat. A Kolmogorov-Szmirnov próba kritikus értékei 147
11. táblázat. A c2 próba kritikus értékei 148
12. táblázat. A Fisher exakt próba valószínűségi szintjei 149
13. táblázat. A random előfordulási teszt alsó kritikus értékei 161
14. táblázat. A random előfordulási teszt felső kritikus értékei 161
15. táblázat A Tukey-próba kritikus értékei 162
16. táblázat A maximális F-próba kritikus értékei 163

A táblázatok forrásai:

1., 2. és 5. táblázat:
Moore, D.S. és McCabe, G.P. 1989. Introduction to the practice of statistics. W.H. Freeman, New York.

6., 7., 8., 9., 10., 11., 12., 13., és 14. táblázat:
Daniel, W.W. 1990. Applied nonparametric statistics. PWS-Kent Publishing Company, Boston.

3. táblázat:
Lukács O. 1987. Matematikai statisztika. Példatár.Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

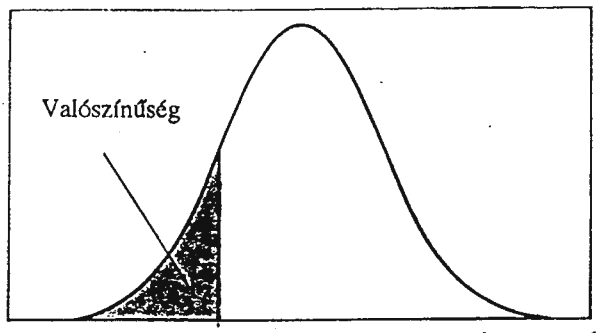
4., 15. és 16. táblázat:
Varga A. 1987. Pszichológiai statisztikai gyakorlat. I-III. Tankönyvkiadó, Budapest.

1. táblázat. Random számok

Sor								
1	19223	95034	05756	28713	96409	12531	42544	82853
2	73676	47150	99400	01927	27754	42648	82425	36290
3	45467	71709	77558	00095	32863	29485	82226	90056
4	52711	38889	93074	60227	40011	85848	48767	52573
5	95592	94007	69971	91481	60779	53791	17297	59335
6	68417	35013	15529	72765	85089	57067	50211	47487
7	82739	57890	20807	47511	81676	55300	94383	14893
8	60940	72024	17868	24943	61790	90656	87964	18883
9	36009	19365	15412	39638	85453	46816	83485	41979
10	38448	48789	18338	24697	39364	42006	76688	08708
11	81486	69487	60513	09297	00412	71238	27649	39950
12	59636	88804	04634	71197	19352	73089	84898	45785
13	62568	70206	40325	03699	71080	22553	11486	11776
14	45149	32992	75730	66280	03819	56202	02938	70915
15	61041	77684	94322	24709	73698	14526	31893	32592
16	14459	26056	31424	80371	65103	62253	50490	61181
17	38167	98532	62183	70632	23417	26185	41448	75532
18	73190	32533	04470	29669	84407	90785	65956	86382
19	95857	07118	87664	92099	58806	66979	98624	84826
20	35476	55972	39421	65850	04266	35435	43742	11937
21	71487	09984	29077	14863	61683	47052	62224	51025
22	13873	81598	95052	90908	73592	75186	87136	95761
23	54580	81507	27102	56027	55892	33063	41842	81868
24	71035	09001	43367	49497	72719	96758	27611	91596
25	96746	12149	37823	71868	18442	35119	62103	39244
26	96927	19931	36089	74192	77567	88741	48409	41903
27	43909	99477	25330	64359	40085	16925	85117	36071
28	15689	14227	06565	14374	13352	49367	81982	87209
29	36759	58984	68288	22913	18638	54303	00795	08727
30	69051	64817	87174	09517	84534	06489	87201	97245
31	05007	16632	81194	14873	04197	85576	45195	96565
32	68732	55259	84292	08796	43165	93739	31685	97150
33	45740	41807	65561	33302	07051	93623	18132	09547
34	27816	78416	18329	21337	35213	37741	04312	68508
35	66925	55658	39100	78458	11206	19876	87151	31260
36	08421	44753	77377	28744	75592	08563	79140	92454
37	53645	66812	61421	47836	12609	15373	98481	14592
38	66831	68908	40772	21558	47781	33586	79177	06928
39	55588	99404	70708	41098	43563	56934	48394	51719
40	12975	13258	13048	45144	72321	81940	00360	02428
41	96767	35964	23822	96012	94591	65194	50842	53372
42	72829	50232	97892	63408	77919	44575	24870	04178
43	88565	42628	17797	49376	61762	16953	88604	12724
44	62964	88145	83083	69453	46109	59505	69680	00900
45	19687	12633	57857	95806	09931	02150	43163	58636
46	37609	59057	66967	83401	60705	02384	90597	93600
47	54973	86278	88737	74351	47500	84552	19909	67181
48	00694	05977	19664	65441	20903	62371	22725	53340
49	71546	05233	53946	68743	72460	27601	45403	88692
50	07511	88915	41267	16853	84569	79367	32337	03316

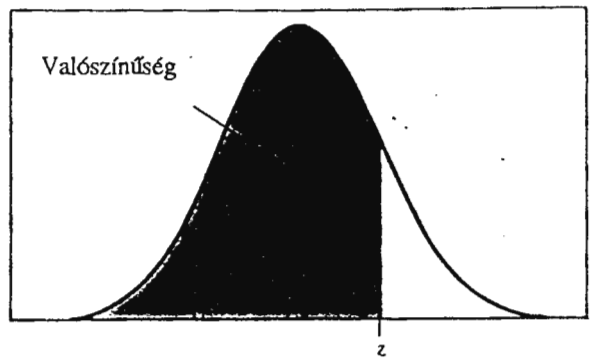
1. táblázat (folytatás)

Sor								
51	03802	29341	29264	80198	12371	13121	54969	43912
52	77320	35030	77519	41109	98296	18984	60869	12349
53	07886	56866	39648	69290	03600	05376	58958	22720
54	87065	74133	21117	70595	22791	67306	28420	52067
55	42090	09628	54035	93879	98441	04606	27381	82637
56	55494	67690	88131	81800	11188	28552	25752	21953
57	16698	30406	96587	65985	07165	50148	16201	86792
58	16297	07626	68683	45335	34377	72941	41764	77038
59	22897	17467	17638	70043	36243	13008	83993	22869
60	98163	45944	34210	64158	76971	27689	82926	75957
61	43400	25831	06283	22138	16043	15706	73345	26238
62	97341	46254	88153	62336	21112	35574	99271	45297
63	64578	67197	28310	90341	37531	63890	52630	76315
64	11022	79124	49525	63078	17229	32165	01343	21394
65	81232	43939	23840	05995	84589	06788	76358	26622
66	36843	84798	51167	44728	20554	55538	27647	32708
67	84329	80081	69516	78934	14293	92478	16479	26974
68	27788	85789	41592	74472	96773	27090	24954	41474
69	99224	00850	43737	75202	44753	63236	14260	73686
70	38075	73239	52555	46342	13365	02182	30443	53229
71	87368	49451	55771	48343	51236	18522	73670	23212
72	40512	00681	44282	47178	08139	78693	34715	75606
73	81636	57578	54286	27216	58758	80358	84115	84568
74	26411	94292	06340	97762	37033	85968	94165	46514
75	80011	09937	57195	33906	94831	10056	42211	65491
76	92813	87503	63494	71379	76550	45984	05481	50830
77	70348	72871	63419	57363	29685	43090	18763	31714
78	24005	52114	26224	39078	80798	15220	43186	00976
79	85063	55810	10470	08029	30025	29734	61181	72090
80	11532	73186	92541	06915	72954	10167	12142	26492
81	59618	03914	05208	84088	20426	39004	84582	87317
82	92965	50837	39921	84661	82514	81899	24565	60874
83	85116	27684	14597	85747	01596	25889	41998	15635
84	15106	10411	90221	49377	44369	28185	80959	76355
85	03638	31589	07871	25792	85823	55400	56026	12193
86	97971	48932	45792	63993	95635	28753	46069	84635
87	49345	18305	76213	82390	77412	97401	50650	71755
88	87370	88099	89695	87633	76987	85503	26257	51736
89	88296	95670	74932	65317	93848	43988	47597	83044
90	79485	92200	99401	54473	34336	82786	05457	60343
91	40830	24979	23333	37619	56227	95941	59494	86539
92	32006	76302	81221	00693	95197	75044	46596	11628
93	37569	85187	44692	50706	53161	69027	88389	60313
94	56680	79003	23361	67094	15019	63261	24543	52884
95	05172	08100	22316	54495	60005	29532	18433	18057
96	74782	27005	03894	98038	20627	40307	47317	92759
97	85228	93264	61409	03404	09649	55937	60843	66167
98	68309	12060	14762	58002	03716	81968	57934	32624
99	26461	88346	52430	60906	74216	96263	69296	90107
100	42672	67680	42376	95023	82744	03971	96560	55148



2. táblázat. A standard normál eloszlás valószínűségei. A táblázat a z-hez tartozó valószínűségeket mutatja

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641



2. táblázat (folytatás)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

3. táblázat. A binomiális eloszlás valószínűségei

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

	p									
n k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1 0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2 0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3 0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4 0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5 0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0312
1	0,2036	0,3280	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1562
2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
4	0,0000	0,0004	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1562
5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0312
6 0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7 0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734

3. táblázat (folytatás)

	p									
n k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8 0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0312
2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0312
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039
9 0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10 0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
11 0	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
1	0,3293	0,3835	0,3248	0,2362	0,1549	0,0932	0,0518	0,0266	0,0125	0,0054
2	0,0867	0,2131	0,2866	0,2953	0,2581	0,1998	0,1395	0,0887	0,0513	0,0269
3	0,0137	0,0710	0,1517	0,2215	0,2581	0,2568	0,2254	0,1774	0,1259	0,0806
4	0,0014	0,0158	0,0536	0,1107	0,1721	0,2201	0,2428	0,2365	0,2060	0,1611

3. táblázat (folytatás)

	p									
n k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
5	0,0001	0,0025	0,0132	0,0388	0,0803	0,1321	0,1830	0,2207	0,2360	0,2256
6	0,0000	0,0003	0,0023	0,0097	0,0268	0,0566	0,0985	0,1471	0,1931	0,2256
7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0017	0,0064	0,0173	0,0379	0,0701	0,1128	0,1611
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0037	0,0102	0,0234	0,0462	0,0806
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	0,0052	0,0126	0,0269
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0021	0,0054
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005
12 0	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
1	0,3413	0,3766	0,3012	0,2062	0,1267	0,0712	0,0368	0,0174	0,0075	0,0029
2	0,0988	0,2301	0,2924	0,2835	0,2323	0,1678	0,1088	0,0639	0,0339	0,0161
3	0,0173	0,0852	0,1720	0,2362	0,2581	0,2397	0,1954	0,1419	0,0923	0,0537
4	0,0021	0,0213	0,0683	0,1329	0,1936	0,2311	0,2367	0,2128	0,1700	0,1208
5	0,0002	0,0038	0,0193	0,0532	0,1032	0,1585	0,2039	0,2270	0,2225	0,1934
6	0,0000	0,0005	0,0040	0,0155	0,0401	0,0792	0,1281	0,1766	0,2124	0,2256
7	0,0000	0,0000	0,0006	0,0033	0,0115	0,0291	0,0591	0,1009	0,1489	0,1934
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0078	0,0199	0,0420	0,0762	0,1208
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0048	0,0125	0,0277	0,0537
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0025	0,0068	0,0161
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0029
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
13 0	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
1	0,3512	0,3672	0,2774	0,1787	0,1029	0,0540	0,0259	0,0113	0,0045	0,0016
2	0,1109	0,2448	0,2937	0,2680	0,2059	0,1388	0,0836	0,0453	0,0220	0,0095
3	0,0214	0,0997	0,1900	0,2457	0,2517	0,2181	0,1651	0,1107	0,0660	0,0349
4	0,0028	0,0277	0,0838	0,1535	0,2097	0,2337	0,2222	0,1845	0,1350	0,0873
5	0,0003	0,0055	0,0266	0,0691	0,1258	0,1803	0,2154	0,2214	0,1989	0,1571
6	0,0000	0,0008	0,0063	0,0230	0,0559	0,1030	0,1546	0,1968	0,2169	0,2095
7	0,0000	0,0001	0,0011	0,0058	0,0186	0,0442	0,0833	0,1312	0,1775	0,2095
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0047	0,0142	0,0336	0,0656	0,1089	0,1571
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0034	0,0101	0,0243	0,0495	0,0873
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0022	0,0065	0,0162	0,0349
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0036	0,0095
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
14 0	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001
1	0,3593	0,3559	0,2539	0,1539	0,0832	0,0407	0,0181	0,0073	0,0027	0,0009
2	0,1229	0,2570	0,2912	0,2501	0,1802	0,1134	0,0634	0,0317	0,0141	0,0056
3	0,0259	0,1142	0,2056	0,2501	0,2402	0,1943	0,1366	0,0845	0,0462	0,0222
4	0,0037	0,0349	0,0998	0,1720	0,2202	0,2290	0,2022	0,1549	0,1040	0,0611

3. táblázat (folytatás)

						p				
n	*k*	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	5	0,0004	0,0078	0,0352	0,0860	0,1468	0,1963	0,2178	0,2066	0,1701	0,1222
	6	0,0000	0,0013	0,0093	0,0322	0,0734	0,1262	0,1759	0,2066	0,2088	0,1833
	7	0,0000	0,0002	0,0019	0,0092	0,0280	0,0618	0,1082	0,1574	0,1952	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020	0,0082	0,0232	0,0510	0,0918	0,1398	0,1833
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0066	0,0183	0,0408	0,0762	0,1222
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0049	0,0136	0,0312	0,0611
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0033	0,0093	0,0222
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0056
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
15	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
	1	0,3658	0,3432	0,2312	0,1319	0,0668	0,0305	0,0126	0,0047	0,0016	0,0005
	2	0,1348	0,2669	0,2856	0,2309	0,1559	0,0916	0,0476	0,0219	0,0090	0,0032
	3	0,0307	0,1285	0,2184	0,2501	0,2252	0,1700	0,1110	0,0634	0,0318	0,0139
	4	0,0049	0,0428	0,1156	0,1876	0,2252	0,2186	0,1792	0,1268	0,0780	0,0417
	5	0,0006	0,0105	0,0449	0,1032	0,1651	0,2061	0,2123	0,1859	0,1404	0,0916
	6	0,0000	0,0019	0,0132	0,0430	0,0917	0,1472	0,1906	0,2066	0,1914	0,1527
	7	0,0000	0,0003	0,0030	0,0138	0,0393	0,0811	0,1319	0,1771	0,2013	0,1964
	8	0,0000	0,0000	0,0005	0,0035	0,0131	0,0348	0,0710	0,1181	0,1647	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0034	0,0116	0,0298	0,0612	0,1048	0,1527
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0030	0,0096	0,0245	0,0515	0,0916
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0074	0,0191	0,0417
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052	0,0139
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0032
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
16	0	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000
	1	0,3706	0,3294	0,2097	0,1126	0,0535	0,0228	0,0087	0,0030	0,0009	0,0002
	2	0,1463	0,2745	0,2775	0,2111	0,1336	0,0732	0,0353	0,0150	0,0056	0,0018
	3	0,0359	0,1423	0,2285	0,2463	0,2079	0,1465	0,0888	0,0468	0,0215	0,0085
	4	0,0061	0,0514	0,1311	0,2001	0,2252	0,2040	0,1553	0,1014	0,0572	0,0278
	5	0,0008	0,0137	0,0555	0,1201	0,1802	0,2099	0,2008	0,1623	0,1123	0,0667
	6	0,0001	0,0028	0,0180	0,0550	0,1101	0,1649	0,1982	0,1983	0,1684	0,1222
	7	0,0000	0,0004	0,0045	0,0197	0,0524	0,1010	0,1524	0,1889	0,1969	0,1746
	8	0,0000	0,0001	0,0009	0,0055	0,0197	0,0487	0,0923	0,1417	0,1812	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0058	0,0185	0,0442	0,0840	0,1318	0,1746
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0056	0,0167	0,0392	0,0755	0,1222
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0049	0,0142	0,0337	0,0667
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0040	0,0115	0,0278
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0029	0,0085
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018

3. táblázat (folytatás)

n	k	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
15		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
16		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17	0	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
	1	0,3741	0,3150	0,1893	0,0957	0,0426	0,0169	0,0060	0,0019	0,0005	0,0001
	2	0,1575	0,2800	0,2673	0,1914	0,1136	0,0581	0,0260	0,0102	0,0035	0,0010
	3	0,0415	0,1556	0,2359	0,2393	0,1893	0,1245	0,0701	0,0341	0,0144	0,0052
	4	0,0076	0,0605	0,1457	0,2093	0,2209	0,1868	0,1320	0,0796	0,0411	0,0182
	5	0,0010	0,0175	0,0668	0,1361	0,1914	0,2081	0,1849	0,1379	0,0875	0,0472
	6	0,0001	0,0039	0,0236	0,0680	0,1276	0,1784	0,1991	0,1839	0,1432	0,0944
	7	0,0000	0,0007	0,0065	0,0267	0,0668	0,1201	0,1685	0,1927	0,1841	0,1484
	8	0,0000	0,0001	0,0014	0,0084	0,0279	0,0644	0,1134	0,1606	0,1883	0,1855
	9	0,0000	0,0000	0,0003	0,0021	0,0093	0,0276	0,0611	0,1070	0,1540	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0025	0,0095	0,0263	0,0571	0,1008	0,1484
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0026	0,0090	0,0242	0,0525	0,0944
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0081	0,0215	0,0472
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0021	0,0068	0,0182
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
18	0	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,3763	0,3002	0,1704	0,0811	0,0338	0,0126	0,0042	0,0012	0,0003	0,0001
	2	0,1683	0,2835	0,2556	0,1723	0,0958	0,0458	0,0190	0,0069	0,0022	0,0006
	3	0,0473	0,1680	0,2406	0,2297	0,1704	0,1046	0,0547	0,0246	0,0095	0,0031
	4	0,0093	0,0700	0,1592	0,2153	0,2130	0,1681	0,1104	0,0614	0,0291	0,0117
	5	0,0014	0,0218	0,0787	0,1507	0,1988	0,2017	0,1664	0,1146	0,0666	0,0327
	6	0,0002	0,0052	0,0301	0,0816	0,1436	0,1873	0,1941	0,1655	0,1181	0,0708
	7	0,0000	0,0010	0,0091	0,0350	0,0820	0,1376	0,1792	0,1892	0,1657	0,1214
	8	0,0000	0,0002	0,0022	0,0120	0,0376	0,0811	0,1327	0,1734	0,1864	0,1669
	9	0,0000	0,0000	0,0004	0,0033	0,0139	0,0386	0,0794	0,1284	0,1694	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0042	0,0149	0,0385	0,0771	0,1248	0,1669
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0046	0,0151	0,0374	0,0742	0,1214
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0047	0,0145	0,0354	0,0708
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0045	0,0134	0,0327
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0039	0,0117
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0031
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

3. táblázat (folytatás)

n	k	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
19	0	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,3774	0,2852	0,1529	0,0685	0,0268	0,0093	0,0029	0,0008	0,0002	0,0000
	2	0,1787	0,2852	0,2428	0,1540	0,0803	0,0358	0,0138	0,0046	0,0013	0,0003
	3	0,0533	0,1796	0,2428	0,2182	0,1517	0,0869	0,0422	0,0175	0,0062	0,0018
	4	0,0112	0,0798	0,1714	0,2182	0,2023	0,1491	0,0909	0,0467	0,0203	0,0074
	5	0,0018	0,0266	0,0907	0,1636	0,2023	0,1916	0,1468	0,0933	0,0497	0,0222
	6	0,0002	0,0069	0,0374	0,0955	0,1574	0,1916	0,1844	0,1451	0,0949	0,0518
	7	0,0000	0,0014	0,0122	0,0443	0,0974	0,1525	0,1844	0,1797	0,1443	0,0961
	8	0,0000	0,0002	0,0032	0,0166	0,0487	0,0981	0,1489	0,1797	0,1771	0,1442
	9	0,0000	0,0000	0,0007	0,0051	0,0198	0,0514	0,0980	0,1464	0,1771	0,1762
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0013	0,0066	0,0220	0,0528	0,0976	0,1449	0,1762
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0077	0,0233	0,0532	0,0970	0,1442
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0022	0,0083	0,0237	0,0529	0,0961
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0085	0,0233	0,0518
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0082	0,0222
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0074
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3774	0,2702	0,1368	0,0576	0,0211	0,0068	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000
	2	0,1887	0,2852	0,2293	0,1369	0,0669	0,0278	0,0100	0,0031	0,0008	0,0002
	3	0,0596	0,1901	0,2428	0,2054	0,1339	0,0716	0,0323	0,0123	0,0040	0,0011
	4	0,0133	0,0898	0,1821	0,2182	0,1897	0,1304	0,0738	0,0350	0,0139	0,0046
	5	0,0022	0,0319	0,1028	0,1746	0,2023	0,1789	0,1272	0,0746	0,0365	0,0148
	6	0,0003	0,0089	0,0454	0,1091	0,1686	0,1916	0,1712	0,1244	0,0746	0,0370
	7	0,0000	0,0020	0,0160	0,0545	0,1124	0,1643	0,1844	0,1659	0,1221	0,0739
	8	0,0000	0,0004	0,0046	0,0222	0,0609	0,1144	0,1614	0,1797	0,1623	0,1201
	9	0,0000	0,0001	0,0011	0,0074	0,0271	0,0654	0,1158	0,1597	0,1771	0,1602
	10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0020	0,0099	0,0308	0,0686	0,1171	0,1593	0,1762
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0030	0,0120	0,0336	0,0710	0,1185	0,1602
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0039	0,0136	0,0355	0,0727	0,1201
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0045	0,0146	0,0366	0,0739
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0049	0,0150	0,0370
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0049	0,0148
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0046
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

4. táblázat

A t-eloszlás

Szabadságfok f \ Valószínűség α	0,90	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,510	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,445	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,424	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,414	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,408	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,404	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,402	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,399	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,398	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,397	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,396	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,395	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,394	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,393	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,393	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,392	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,392	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,392	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,391	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,391	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,391	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,390	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,390	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,390	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,390	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,390	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,389	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,389	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,389	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,389	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,126	0,388	0,681	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,126	0,387	0,679	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,126	0,386	0,677	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,126	0,385	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

5. táblázat. Az F eloszlás kritikus értékei

Számláló szabadsági foka	p	Nevező szabadsági foka 1	2	3	4	5	6	7	8	9
	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
1	.025	647.79	799.50	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28
	.010	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.6	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5
	.001	405284	500000	540379	562500	576405	585937	592873	598144	602284
	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
2	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39
	.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
	.001	998.50	999.00	999.17	999.25	999.30	999.33	999.36	999.37	999.39
	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
3	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
	.001	167.03	148.50	141.11	137.10	134.58	132.85	131.58	130.62	129.86
	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
4	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
	.001	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47
	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
5	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
	.001	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.83	28.16	27.65	27.24
	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
6	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.001	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.46	19.03	18.69
	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
7	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.001	29.25	21.69	18.77	17.20	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33
	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
8	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.001	25.41	18.49	15.83	14.39	13.48	12.86	12.40	12.05	11.77
	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
9	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.001	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11
	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
10	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.001	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.93	9.52	9.20	8.96
	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
	.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
11	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59
	.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
	.001	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12
	.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
12	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.001	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48

5. táblázat (folytatás)

Nevező szabadsági foka										
10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
60.19	60.71	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.69	62.79	63.06	63.30
241.88	243.91	245.95	248.01	249.26	250.10	251.14	251.77	252.20	253.25	254.19
968.63	976.71	984.87	993.10	998.08	1001.4	1005.6	1008.1	1009.8	1014.0	1017.7
6055.8	6106.3	6157.3	6208.7	6239.8	6260.6	6286.8	6302.5	6313.0	6339.4	6362.7
605621	610668	615764	620908	624017	626099	628712	630285	631337	633972	636301
9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.49
19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.48	19.49	19.49
39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.48	39.49	39.50
99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
999.40	999.42	999.43	999.45	999.46	999.47	999.47	999.48	999.48	999.49	999.50
5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.13
8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.53
14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	14.01	13.99	13.95	13.91
27.23	27.05	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.35	26.32	26.22	26.14
129.25	128.32	127.37	126.42	125.84	125.45	124.96	124.66	124.47	123.97	123.53
3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.76
5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.63
8.84	8.75	8.66	8.56	8.50	8.46	8.41	8.38	8.36	8.31	8.26
14.55	14.37	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.65	13.56	13.47
48.05	47.41	46.76	46.10	45.70	45.43	45.09	44.88	44.75	44.40	44.09
3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.12	3.11
4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.43	4.40	4.37
6.62	6.52	6.43	6.33	6.27	6.23	6.18	6.14	6.12	6.07	6.02
10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.24	9.20	9.11	9.03
26.92	26.42	25.91	25.39	25.08	24.87	24.60	24.44	24.33	24.06	23.82
2.94	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.77	2.76	2.74	2.72
4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.75	3.74	3.70	3.67
5.46	5.37	5.27	5.17	5.11	5.07	5.01	4.98	4.96	4.90	4.86
7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.09	7.06	6.97	6.89
18.41	17.99	17.56	17.12	16.85	16.67	16.44	16.31	16.21	15.98	15.77
2.70	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.52	2.51	2.49	2.47
3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.23
4.76	4.67	4.57	4.47	4.40	4.36	4.31	4.28	4.25	4.20	4.15
6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.82	5.74	5.66
14.08	13.71	13.32	12.93	12.69	12.53	12.33	12.20	12.12	11.91	11.72
2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.30
3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.93
4.30	4.20	4.10	4.00	3.94	3.89	3.84	3.81	3.78	3.73	3.68
5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	5.03	4.95	4.87
11.54	11.19	10.84	10.48	10.26	10.11	9.92	9.80	9.73	9.53	9.36
2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.22	2.21	2.18	2.16
3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.79	2.75	2.71
3.96	3.87	3.77	3.67	3.60	3.56	3.51	3.47	3.45	3.39	3.34
5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.48	4.40	4.32
9.89	9.57	9.24	8.90	8.69	8.55	8.37	8.26	8.19	8.00	7.84
2.32	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.12	2.11	2.08	2.06
2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.62	2.58	2.54
3.72	3.62	3.52	3.42	3.35	3.31	3.26	3.22	3.20	3.14	3.09
4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.08	4.00	3.92
8.75	8.45	8.13	7.80	7.60	7.47	7.30	7.19	7.12	6.94	6.78
2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	1.98
2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.49	2.45	2.41
3.53	3.43	3.33	3.23	3.16	3.12	3.06	3.03	3.00	2.94	2.89
4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.81	3.78	3.69	3.61
7.92	7.63	7.32	7.01	6.81	6.68	6.52	6.42	6.35	6.18	6.02
2.19	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.93	1.91
2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.38	2.34	2.30
3.37	3.28	3.18	3.07	3.01	2.96	2.91	2.87	2.85	2.79	2.73
4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.54	3.45	3.37
7.29	7.00	6.71	6.40	6.22	6.09	5.93	5.83	5.76	5.59	5.44

5. táblázat (folytatás)

Számláló szabadsági foka	p	Nevező szabadsági foka 1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
	0.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
13	0.025	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31
	0.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
	0.001	17.82	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98
	0.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
	0.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
14	0.025	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21
	0.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
	0.001	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.58
	0.100	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	0.050	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
15	0.025	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
	0.010	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
	0.001	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26
	0.100	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
	0.050	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
16	0.025	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05
	0.010	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
	0.001	16.12	10.97	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.98
	0.100	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
	0.050	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
17	0.025	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98
	0.010	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
	0.001	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75
	0.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
	0.050	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
18	0.025	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93
	0.010	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
	0.001	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56
	0.100	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
	0.050	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
19	0.025	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88
	0.010	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
	0.001	15.08	10.16	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39
	0.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
	0.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
20	0.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
	0.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
	0.001	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24
	0.100	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
	0.050	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
21	0.025	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80
	0.010	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
	0.001	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11
	0.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
	0.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
22	0.025	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76
	0.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
	0.001	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99
	0.100	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
	0.050	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
23	0.025	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73
	0.010	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
	0.001	14.20	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89
	0.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
	0.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
24	0.025	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
	0.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
	0.001	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80

5. táblázat (folytatás)

Nevező szabadsági foka										
10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.85
2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.30	2.25	2.21
3.25	3.15	3.05	2.95	2.88	2.84	2.78	2.74	2.72	2.66	2.60
4.10	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38	3.34	3.25	3.18
6.80	6.52	6.23	5.93	5.75	5.63	5.47	5.37	5.30	5.14	4.99
2.10	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.80
2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.22	2.18	2.14
3.15	3.05	2.95	2.84	2.78	2.73	2.67	2.64	2.61	2.55	2.50
3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.18	3.09	3.02
6.40	6.13	5.85	5.56	5.38	5.25	5.10	5.00	4.94	4.77	4.62
2.06	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.76
2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.16	2.11	2.07
3.06	2.96	2.86	2.76	2.69	2.64	2.59	2.55	2.52	2.46	2.40
3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	3.05	2.96	2.88
6.08	5.81	5.54	5.25	5.07	4.95	4.80	4.70	4.64	4.47	4.33
2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.78	1.75	1.72
2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.11	2.06	2.02
2.99	2.89	2.79	2.68	2.61	2.57	2.51	2.47	2.45	2.38	2.32
3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.93	2.84	2.76
5.81	5.55	5.27	4.99	4.82	4.70	4.54	4.45	4.39	4.23	4.08
2.00	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.76	1.75	1.72	1.69
2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.06	2.01	1.97
2.92	2.82	2.72	2.62	2.55	2.50	2.44	2.41	2.38	2.32	2.26
3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.83	2.75	2.66
5.58	5.32	5.05	4.78	4.60	4.48	4.33	4.24	4.18	4.02	3.87
1.98	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.74	1.72	1.69	1.66
2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	2.02	1.97	1.92
2.87	2.77	2.67	2.56	2.49	2.44	2.38	2.35	2.32	2.26	2.20
3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.75	2.66	2.58
5.39	5.13	4.87	4.59	4.42	4.30	4.15	4.06	4.00	3.84	3.69
1.96	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.64
2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.93	1.88
2.82	2.72	2.62	2.51	2.44	2.39	2.33	2.30	2.27	2.20	2.14
3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.67	2.58	2.50
5.22	4.97	4.70	4.43	4.26	4.14	3.99	3.90	3.84	3.68	3.53
1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.68	1.64	1.61
2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.95	1.90	1.85
2.77	2.68	2.57	2.46	2.40	2.35	2.29	2.25	2.22	2.16	2.09
3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.61	2.52	2.43
5.08	4.82	4.56	4.29	4.12	4.00	3.86	3.77	3.70	3.54	3.40
1.92	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.66	1.62	1.59
2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.92	1.87	1.82
2.73	2.64	2.53	2.42	2.36	2.31	2.25	2.21	2.18	2.11	2.05
3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.58	2.55	2.46	2.37
4.95	4.70	4.44	4.17	4.00	3.88	3.74	3.64	3.58	3.42	3.28
1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.60	1.57
2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.89	1.84	1.79
2.70	2.60	2.50	2.39	2.32	2.27	2.21	2.17	2.14	2.08	2.01
3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.50	2.40	2.32
4.83	4.58	4.33	4.06	3.89	3.78	3.63	3.54	3.48	3.32	3.17
1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.64	1.62	1.59	1.55
2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.86	1.81	1.76
2.67	2.57	2.47	2.36	2.29	2.24	2.18	2.14	2.11	2.04	1.98
3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.45	2.35	2.27
4.73	4.48	4.23	3.96	3.79	3.68	3.53	3.44	3.38	3.22	3.08
1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.57	1.54
2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.84	1.79	1.74
2.64	2.54	2.44	2.33	2.26	2.21	2.15	2.11	2.08	2.01	1.94
3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.40	2.31	2.22
4.64	4.39	4.14	3.87	3.71	3.59	3.45	3.36	3.29	3.14	2.99

5. táblázat (folytatás)

Számláló szabadsági foka	p	Nevező szabadsági foka 1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	0.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
	0.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
	0.025	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68
	0.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
	0.001	13.88	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.71
26	0.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
	0.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
	0.025	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65
	0.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
	0.001	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64
27	0.100	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
	0.050	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
	0.025	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63
	0.010	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
	0.001	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57
28	0.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87
	0.050	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
	0.025	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61
	0.010	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
	0.001	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50
29	0.100	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
	0.050	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
	0.025	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59
	0.010	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
	0.001	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45
30	0.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
	0.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
	0.025	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
	0.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
	0.001	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39
40	0.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
	0.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
	0.025	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45
	0.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
	0.001	12.61	8.25	6.59	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02
50	0.100	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76
	0.050	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
	0.025	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38
	0.010	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78
	0.001	12.22	7.96	6.34	5.46	4.90	4.51	4.22	4.00	3.82
60	0.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
	0.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
	0.025	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
	0.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
	0.001	11.97	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69
100	0.100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69
	0.050	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
	0.025	5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24
	0.010	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
	0.001	11.50	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61	3.44
200	0.100	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66
	0.050	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
	0.025	5.10	3.76	3.18	2.85	2.63	2.47	2.35	2.26	2.18
	0.010	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
	0.001	11.15	7.15	5.63	4.81	4.29	3.92	3.65	3.43	3.26
1000	0.100	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64
	0.050	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
	0.025	5.04	3.70	3.13	2.80	2.58	2.42	2.30	2.20	2.13
	0.010	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
	0.001	10.89	6.96	5.46	4.65	4.14	3.78	3.51	3.30	3.13

5. táblázat (folytatás)

Nevező szabadsági foka										
10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.61	1.59	1.56	1.52
2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.82	1.77	1.72
2.61	2.51	2.41	2.30	2.23	2.18	2.12	2.08	2.05	1.98	1.91
3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.40	2.36	2.27	2.18
4.56	4.31	4.06	3.79	3.63	3.52	3.37	3.28	3.22	3.06	2.91
1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.58	1.54	1.51
2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.80	1.75	1.70
2.59	2.49	2.39	2.28	2.21	2.16	2.09	2.05	2.03	1.95	1.89
3.09	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.33	2.23	2.14
4.48	4.24	3.99	3.72	3.56	3.44	3.30	3.21	3.15	2.99	2.84
1.85	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.58	1.57	1.53	1.50
2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.79	1.73	1.68
2.57	2.47	2.36	2.25	2.18	2.13	2.07	2.03	2.00	1.93	1.86
3.06	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.29	2.20	2.11
4.41	4.17	3.92	3.66	3.49	3.38	3.23	3.14	3.08	2.92	2.78
1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.57	1.56	1.52	1.48
2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.71	1.66
2.55	2.45	2.34	2.23	2.16	2.11	2.05	2.01	1.98	1.91	1.84
3.03	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.26	2.17	2.08
4.35	4.11	3.86	3.60	3.43	3.32	3.18	3.09	3.02	2.86	2.72
1.83	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.55	1.51	1.47
2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.75	1.70	1.65
2.53	2.43	2.32	2.21	2.14	2.09	2.03	1.99	1.96	1.89	1.82
3.00	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.23	2.14	2.05
4.29	4.05	3.80	3.54	3.38	3.27	3.12	3.03	2.97	2.81	2.66
1.82	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.55	1.54	1.50	1.46
2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.74	1.68	1.63
2.51	2.41	2.31	2.20	2.12	2.07	2.01	1.97	1.94	1.87	1.80
2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.25	2.21	2.11	2.02
4.24	4.00	3.75	3.49	3.33	3.22	3.07	2.98	2.92	2.76	2.61
1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.42	1.38
2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.64	1.58	1.52
2.39	2.29	2.18	2.07	1.99	1.94	1.88	1.83	1.80	1.72	1.65
2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	2.02	1.92	1.82
3.87	3.64	3.40	3.14	2.98	2.87	2.73	2.64	2.57	2.41	2.25
1.73	1.68	1.63	1.57	1.53	1.50	1.46	1.44	1.42	1.38	1.33
2.03	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.58	1.51	1.45
2.32	2.22	2.11	1.99	1.92	1.87	1.80	1.75	1.72	1.64	1.56
2.70	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.91	1.80	1.70
3.67	3.44	3.20	2.95	2.79	2.68	2.53	2.44	2.38	2.21	2.05
1.71	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.41	1.40	1.35	1.30
1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.53	1.47	1.40
2.27	2.17	2.06	1.94	1.87	1.82	1.74	1.70	1.67	1.58	1.49
2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.84	1.73	1.62
3.54	3.32	3.08	2.83	2.67	2.55	2.41	2.32	2.25	2.08	1.92
1.66	1.61	1.56	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.34	1.28	1.22
1.93	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.45	1.38	1.30
2.18	2.08	1.97	1.85	1.77	1.71	1.64	1.59	1.56	1.46	1.36
2.50	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.69	1.57	1.45
3.30	3.07	2.84	2.59	2.43	2.32	2.17	2.08	2.01	1.83	1.64
1.63	1.58	1.52	1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.29	1.23	1.16
1.88	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.39	1.30	1.21
2.11	2.01	1.90	1.78	1.70	1.64	1.56	1.51	1.47	1.37	1.25
2.41	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.58	1.45	1.30
3.12	2.90	2.67	2.42	2.26	2.15	2.00	1.90	1.83	1.64	1.43
1.61	1.55	1.49	1.43	1.38	1.35	1.30	1.27	1.25	1.18	1.08
1.84	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.33	1.24	1.11
2.06	1.96	1.85	1.72	1.64	1.58	1.50	1.45	1.41	1.29	1.13
2.34	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.50	1.35	1.16
2.99	2.77	2.54	2.30	2.14	2.02	1.87	1.77	1.69	1.49	1.22

6. táblázat. A Wilcoxon előjelteszt valószínűségi szintjei

T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P
$n = 5$		$n = 8$		$n = 10$		$n = 11$		$n = 12$		$n = 13$	
*0	.0313	0	.0039	0	.0010	0	.0005	0	.0002	0	.0001
1	.0625	1	.0078	1	.0020	1	.0010	1	.0005	1	.0002
2	.0938	2	.0117	2	.0029	2	.0015	2	.0007	2	.0004
3	.1563	3	.0195	3	.0049	3	.0024	3	.0012	3	.0006
4	.2188	4	.0273	4	.0068	4	.0034	4	.0017	4	.0009
5	.3125	*5	.0391	5	.0098	5	.0049	5	.0024	5	.0012
6	.4063	6	.0547	6	.0137	6	.0068	6	.0034	6	.0017
7	.5000	7	.0742	7	.0186	7	.0093	7	.0046	7	.0023
		8	.0977	8	.0244	8	.0122	8	.0061	8	.0031
$n = 6$		9	.1250	9	.0322	9	.0161	9	.0081	9	.0040
0	.0156	10	.1563	*10	.0420	10	.0210	10	.0105	10	.0052
1	.0313	11	.1914	11	.0527	11	.0269	11	.0134	11	.0067
*2	.0469	12	.2305	12	.0654	12	.0337	12	.0171	12	.0085
3	.0781	13	.2734	13	.0801	*13	.0415	13	.0212	13	.0107
4	.1094	14	.3203	14	.0967	14	.0508	14	.0261	14	.0133
5	.1563	15	.3711	15	.1162	15	.0615	15	.0320	15	.0164
6	.2188	16	.4219	16	.1377	16	.0737	16	.0386	16	.0199
7	.2813	17	.4727	17	.1611	17	.0874	*17	.0461	17	.0239
8	.3438	18	.5273	18	.1875	18	.1030	18	.0549	18	.0287
9	.4219	$n = 9$		19	.2158	19	.1201	19	.0647	19	.0341
10	.5000	0	.0020	20	.2461	20	.1392	20	.0757	20	.0402
		1	.0039	21	.2783	21	.1602	21	.0881	*21	.0471
$n = 7$		2	.0059	22	.3125	22	.1826	22	.1018	22	.0549
0	.0078	3	.0098	23	.3477	23	.2065	23	.1167	23	.0636
1	.0156	4	.0137	24	.3848	24	.2324	24	.1331	24	.0732
2	.0234	5	.0195	25	.4229	25	.2598	25	.1506	25	.0839
*3	.0391	6	.0273	26	.4609	26	.2886	26	.1697	26	.0955
4	.0547	7	.0371	27	.5000	27	.3188	27	.1902	27	.1082
5	.0781	*8	.0488			28	.3501	28	.2119	28	.1219
6	.1094	9	.0645			29	.3823	29	.2349	29	.1367
7	.1484	10	.0820			30	.4155	30	.2593	30	.1527
8	.1875	11	.1016			31	.4492	31	.2847	31	.1698
9	.2344	12	.1250			32	.4829	32	.3110	32	.1879
10	.2891	13	.1504			33	.5171	33	.3386	33	.2072
11	.3438	14	.1797					34	.3667	34	.2274
12	.4063	15	.2129					35	.3955	35	.2487
13	.4688	16	.2480					36	.4250	36	.2709
14	.5313	17	.2852					37	.4548	37	.2939
		18	.3262					38	.4849	38	.3177
		19	.3672					39	.5151	39	.3424
		20	.4102							40	.3677
		21	.4551							41	.3934
		22	.5000							42	.4197
										43	.4463
										44	.4730
										45	.5000

6. táblázat (folytatás)

T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P
$n = 14$		$n = 14$		$n = 15$		$n = 16$		$n = 17$		$n = 17$	
0	.0001	50	.4516	47	.2444	39	.0719	25	.0064	74	.4633
2	.0002	51	.4758	48	.2622	40	.0795	26	.0075	75	.4816
3	.0003	52	.5000	49	.2807	41	.0877	27	.0087	76	.5000
4	.0004			50	.2997	42	.0964	28	.0101		
5	.0006	$n = 15$		51	.3193	43	.1057	29	.0116	$n = 18$	
6	.0009	1	.0001	52	.3394	44	.1156	30	.0133	6	.0001
7	.0012	3	.0002	53	.3599	45	.1261	31	.0153	10	.0002
8	.0015	5	.0003	54	.3808	46	.1372	32	.0174	12	.0003
9	.0020	6	.0004	55	.4020	47	.1489	33	.0198	14	.0004
10	.0026	7	.0006	56	.4235	48	.1613	34	.0224	15	.0005
11	.0034	8	.0008	57	.4452	49	.1742	35	.0253	16	.0006
12	.0043	9	.0010	58	.4670	50	.1877	36	.0284	17	.0008
13	.0054	10	.0013	59	.4690	51	.2019	37	.0319	18	.0010
14	.0067	11	.0017	60	.5110	52	.2166	38	.0357	19	.0012
15	.0083	12	.0021	$n = 16$		53	.2319	39	.0398	20	.0014
16	.0101	13	.0027	3	.0001	54	.2477	40	.0443	21	.0017
17	.0123	14	.0034	5	.0002	55	.2641	*41	.0492	22	.0020
18	.0148	15	.0042	7	.0003	56	.2809	42	.0544	23	.0024
19	.0176	16	.0051	8	.0004	57	.2983	43	.0601	24	.0028
20	.0209	17	.0062	9	.0005	58	.3161	44	.0662	25	.0033
21	.0247	18	.0075	10	.0007	59	.3343	45	.0727	26	.0038
22	.0290	19	.0090	11	.0008	60	.3529	46	.0797	27	.0045
23	.0338	20	.0108	12	.0011	61	.3718	47	.0871	28	.0052
24	.0392	21	.0128	13	.0013	62	.3910	48	.0950	29	.0060
*25	.0453	22	.0151	14	.0017	63	.4104	49	.1034	30	.0069
26	.0520	23	.0177	15	.0021	64	.4301	50	.1123	31	.0080
27	.0594	24	.0206	16	.0026	65	.4500	51	.1218	32	.0091
28	.0676	25	.0240	17	.0031	66	.4699	52	.1317	33	.0104
29	.0765	26	.0277	18	.0038	67	.4900	53	.1421	34	.0118
30	.0863	27	.0319	19	.0046	68	.5100	54	.1530	35	.0134
31	.0969	28	.0365	20	.0055			55	.1645	36	.0152
32	.1083	29	.0416	21	.0065	$n = 17$		56	.1764	37	.0171
33	.1206	*30	.0473	22	.0078	4	.0001	57	.1889	38	.0192
34	.1338	31	.0535	23	.0091	8	.0002	58	.2019	39	.0216
35	.1479	32	.0603	24	.0107	9	.0003	59	.2153	40	.0241
36	.1629	33	.0677	25	.0125	11	.0004	60	.2293	41	.0269
37	.1788	34	.0757	26	.0145	12	.0005	61	.2437	42	.0300
38	.1955	35	.0844	27	.0168	13	.0007	62	.2585	43	.0333
39	.2131	36	.0938	28	.0193	14	.0008	63	.2738	44	.0368
40	.2316	37	.1039	29	.0222	15	.0010	64	.2895	45	.0407
41	.2508	38	.1147	30	.0253	16	.0013	65	.3056	46	.0449
42	.2708	39	.1262	31	.0288	17	.0016	66	.3221	*47	.0494
43	.2915	40	.1384	32	.0327	18	.0019	67	.3389	48	.0542
44	.3129	41	.1514	33	.0370	19	.0023	68	.3559	49	.0594
45	.3349	42	.1651	34	.0416	20	.0028	69	.3733	50	.0649
46	.3574	43	.1796	*35	.0467	21	.0033	70	.3910	51	.0708
47	.3804	44	.1947	36	.0523	22	.0040	71	.4088	52	.0770
48	.4039	45	.2106	37	.0583	23	.0047	72	.4268	53	.0837
49	.4276	46	.2271	38	.0649	24	.0055	73	.4450	54	.0907

6. táblázat (folytatás)

T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P
n = 18		n = 19		n = 19		n = 20		n = 20		n = 21	
55	.0982	30	.0036	79	.2706	48	.0164	97	.3921	61	.0298
56	.1061	31	.0041	80	.2839	49	.0181	98	.4062	62	.0323
57	.1144	32	.0047	81	.2974	50	.0200	99	.4204	63	.0351
58	.1231	33	.0054	82	.3113	51	.0220	100	.4347	64	.0380
59	.1323	34	.0062	83	.3254	52	.0242	101	.4492	65	.0411
60	.1419	35	.0070	84	.3397	53	.0266	102	.4636	66	.0444
61	.1519	36	.0080	85	.3543	54	.0291	103	.4782	*67	.0479
62	.1624	37	.0090	86	.3690	55	.0319	104	.4927	68	.0516
63	.1733	38	.0102	87	.3840	56	.0348	105	.5073	69	.0555
64	.1846	39	.0115	88	.3991	57	.0379	n = 21		70	.0597
65	.1964	40	.0129	89	.4144	58	.0413	14	.0001	71	.0640
66	.2086	41	.0145	90	.4298	59	.0448	20	.0002	72	.0686
67	.2211	42	.0162	91	.4453	*60	.0487	22	.0003	73	.0735
68	.2341	43	.0180	92	.4609	61	.0527	24	.0004	74	.0786
69	.2475	44	.0201	93	.4765	62	.0570	26	.0005	75	.0839
70	.2613	45	.0223	94	.4922	63	.0615	27	.0006	76	.0895
71	.2754	46	.0247	95	.5078	64	.0664	28	.0007	77	.0953
72	.2899	47	.0273			65	.0715	29	.0008	78	.1015
73	.3047	48	.0301	n = 20		66	.0768	30	.0009	79	.1078
74	.3198	49	.0331	11	.0001	67	.0825	31	.0011	80	.1145
75	.3353	50	.0364	16	.0002	68	.0884	32	.0012	81	.1214
76	.3509	51	.0399	19	.0003	69	.0947	33	.0014	82	.1286
77	.3669	52	.0437	20	.0004	70	.1012	34	.0016	83	.1361
78	.3830	*53	.0478	22	.0005	71	.1081	35	.0019	84	.1439
79	.3994	54	.0521	23	.0006	72	.1153	36	.0021	85	.1519
80	.4159	55	.0567	24	.0007	73	.1227	37	.0024	86	.1602
81	.4325	56	.0616	25	.0008	74	.1305	38	.0028	87	.1688
82	.4493	57	.0668	26	.0010	75	.1387	39	.0031	88	.1777
83	.4661	58	.0723	27	.0012	76	.1471	40	.0036	89	.1869
84	.4831	59	.0782	28	.0014	77	.1559	41	.0040	90	.1963
85	.5000	60	.0844	29	.0016	78	.1650	42	.0045	91	.2060
		61	.0909	30	.0018	79	.1744	43	.0051	92	.2160
n = 19		62	.0978	31	.0021	80	.1841	44	.0057	93	.2262
9	.0001	63	.1051	32	.0024	81	.1942	45	.0063	94	.2367
13	.0002	64	.1127	33	.0028	82	.2045	46	.0071	95	.2474
15	.0003	65	.1206	34	.0032	83	.2152	47	.0079	96	.2584
17	.0004	66	.1290	35	.0036	84	.2262	48	.0088	97	.2696
18	.0005	67	.1377	36	.0042	85	.2375	49	.0097	98	.2810
19	.0006	68	.1467	37	.0047	86	.2490	50	.0108	99	.2927
20	.0007	69	.1562	38	.0053	87	.2608	51	.0119	100	.3046
21	.0008	70	.1660	39	.0060	88	.2729	52	.0132	101	.3166
22	.0010	71	.1762	40	.0068	89	.2853	53	.0145	102	.3289
23	.0012	72	.1868	41	.0077	90	.2979	54	.0160	103	.3414
24	.0014	73	.1977	42	.0086	91	.3108	55	.0175	104	.3540
25	.0017	74	.2090	43	.0096	92	.3238	56	.0192	105	.3667
26	.0020	75	.2207	44	.0107	93	.3371	57	.0210	106	.3796
27	.0023	76	.2327	45	.0120	94	.3506	58	.0230	107	.3927
28	.0027	77	.2450	46	.0133	95	.3643	59	.0251	108	.4058
29	.0031	78	.2576	47	.0148	96	.3781	60	.0273	109	.4191

6. táblázat (folytatás)

T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P
n = 21		n = 22		n = 22		n = 23		n = 23		n = 24	
110	.4324	67	.0271	116	.3751	68	.0163	117	.2700	62	.0053
111	.4459	68	.0293	117	.3873	69	.0177	118	.2800	63	.0058
112	.4593	69	.0317	118	.3995	70	.0192	119	.2902	64	.0063
113	.4729	70	.0342	119	.4119	71	.0208	120	.3005	65	.0069
114	.4864	71	.0369	120	.4243	72	.0224	121	.3110	66	.0075
115	.5000	72	.0397	121	.4368	73	.0242	122	.3217	67	.0082
		73	.0427	122	.4494	74	.0261	123	.3325	68	.0089
		74	.0459	123	.4620	75	.0281	124	.3434	69	.0097
n = 22		*75	.0492	124	.4746	76	.0303	125	.3545	70	.0106
18	.0001	76	.0527	125	.4873	77	.0325	126	.3657	71	.0115
23	.0002	77	.0564	126	.5000	78	.0349	127	.3770	72	.0124
26	.0003	78	.0603			79	.0274	128	.3884	73	.0135
29	.0004	79	.0644	n = 23		80	.0401	129	.3999	74	.0146
30	.0005	80	.0687	21	.0001	81	.0429	130	.4115	75	.0157
32	.0006	81	.0733	28	.0002	82	.0459	131	.4231	76	.0170
33	.0007	82	.0780	31	.0003	*83	.0490	132	.4348	77	.0183
34	.0008	83	.0829	33	.0004	84	.0523	133	.4466	78	.0197
35	.0010	84	.0881	35	.0005	85	.0557	134	.4584	79	.0212
36	.0011	85	.0935	36	.0006	86	.0593	135	.4703	80	.0228
37	.0013	86	.0991	38	.0007	87	.0631	136	.4822	81	.0245
38	.0014	87	.1050	39	.0008	88	.0671	137	.4941	82	.0263
39	.0016	88	.1111	40	.0009	89	.0712	138	.5060	83	.0282
40	.0018	89	.1174	41	.0011	90	.0755			84	.0302
41	.0021	90	.1240	42	.0012	91	.0801	n = 24		85	.0323
42	.0023	91	.1308	43	.0014	92	.0848	25	.0001	86	.0346
43	.0026	92	.1378	44	.0015	93	.0897	32	.0002	87	.0369
44	.0030	93	.1451	45	.0017	94	.0948	36	.0003	88	.0394
45	.0033	94	.1527	46	.0019	95	.1001	38	.0004	89	.0420
46	.0037	95	.1604	47	.0022	96	.1056	40	.0005	90	.0447
47	.0042	96	.1685	48	.0024	97	.1113	42	.0006	*91	.0475
48	.0046	97	.1767	49	.0027	98	.1172	43	.0007	92	.0505
49	.0052	98	.1853	50	.0030	99	.1234	44	.0008	93	.0537
50	.0057	99	.1940	51	.0034	100	.1297	45	.0009	94	.0570
51	.0064	100	.2030	52	.0037	101	.1363	46	.0010	95	.0604
52	.0070	101	.2122	53	.0041	102	.1431	47	.0011	96	.0640
53	.0078	102	.2217	54	.0046	103	.1501	48	.0013	97	.0678
54	.0086	103	.2314	55	.0051	104	.1573	49	.0014	98	.0717
55	.0095	104	.2413	56	.0056	105	.1647	50	.0016	99	.0758
56	.0104	105	.2514	57	.0061	106	.1723	51	.0018	100	.0800
57	.0115	106	.2618	58	.0068	107	.1802	52	.0020	101	.0844
58	.0126	107	.2723	59	.0074	108	.1883	53	.0022	102	.0890
59	.0138	108	.2830	60	.0082	109	.1965	54	.0024	103	.0938
60	.0151	109	.2940	61	.0089	110	.2050	55	.0027	104	.0987
61	.0164	110	.3051	62	.0098	111	.2137	56	.0029	105	.1038
62	.0179	111	.3164	63	.0107	112	.2226	57	.0033	106	.1091
63	.0195	112	.3278	64	.0117	113	.2317	58	.0036	107	.1146
64	.0212	113	.3394	65	.0127	114	.2410	59	.0040	108	.1203
65	.0231	114	.3512	66	.0138	115	.2505	60	.0044	109	.1261
66	.0250	115	.3631	67	.0150	116	.2601	61	.0048	110	.1322

6. táblázat (folytatás)

T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P
n = 24		n = 25		n = 25		n = 25		n = 26		n = 26	
111	.1384	50	.0008	99	.0452	148	.3556	81	.0076	130	.1289
112	.1448	51	.0009	*100	.0479	149	.3655	82	.0082	131	.1344
113	.1515	52	.0010	101	.0507	150	.3755	83	.0088	132	.1399
114	.1583	53	.0011	102	.0537	151	.3856	84	.0095	133	.1457
115	.1653	54	.0013	103	.0567	152	.3957	85	.0102	134	.1516
116	.1724	55	.0014	104	.0600	153	.4060	86	.0110	135	.1576
117	.1798	56	.0015	105	.0633	154	.4163	87	.0118	136	.1638
118	.1874	57	.0017	106	.0668	155	.4266	88	.0127	137	.1702
119	.1951	58	.0019	107	.0705	156	.4370	89	.0136	138	.1767
120	.2031	59	.0021	108	.0742	157	.4474	90	.0146	139	.1833
121	.2112	60	.0023	109	.0782	158	.4579	91	.0156	140	.1901
122	.2195	61	.0025	110	.0822	159	.4684	92	.0167	141	.1970
123	.2279	62	.0028	111	.0865	160	.4789	93	.0179	142	.2041
124	.2366	63	.0031	112	.0909	161	.4895	94	.0191	143	.2114
125	.2454	64	.0034	113	.0954	162	.5000	95	.0204	144	.2187
126	.2544	65	.0037	114	.1001			96	.0217	145	.2262
127	.2635	66	.0040	115	.1050	n = 26		97	.0232	146	.2339
128	.2728	67	.0044	116	.1100	34	.0001	98	.0247	147	.2417
129	.2823	68	.0048	117	.1152	42	.0002	99	.0263	148	.2496
130	.2919	69	.0053	118	.1205	46	.0003	100	.0279	149	.2577
131	.3017	70	.0057	119	.1261	49	.0004	101	.0297	150	.2658
132	.3115	71	.0062	120	.1317	51	.0005	102	.0315	151	.2741
133	.3216	72	.0068	121	.1376	53	.0006	103	.0334	152	.2826
134	.3317	73	.0074	122	.1436	55	.0007	104	.0355	153	.2911
135	.3420	74	.0080	123	.1498	56	.0008	105	.0376	154	.2998
136	.3524	75	.0087	124	.1562	57	.0009	106	.0398	155	.3085
137	.3629	76	.0094	125	.1627	58	.0010	107	.0421	156	.3174
138	.3735	77	.0101	126	.1694	59	.0011	108	.0445	157	.3264
139	.3841	78	.0110	127	.1763	60	.0012	109	.0470	158	.3355
140	.3949	79	.0118	128	.1833	61	.0013	*110	.0497	159	.3447
141	.4058	80	.0128	129	.1905	62	.0015	111	.0524	160	.3539
142	.4167	81	.0137	130	.1979	63	.0016	112	.0553	161	.3633
143	.4277	82	.0148	131	.2054	64	.0018	113	.0582	162	.3727
144	.4387	83	.0159	132	.2131	65	.0020	114	.0613	163	.3822
145	.4498	84	.0171	133	.2209	66	.0021	115	.0646	164	.3918
146	.4609	85	.0183	134	.2289	67	.0023	116	.0679	165	.4014
147	.4721	86	.0197	135	.2371	68	.0026	117	.0714	166	.4111
148	.4832	87	.0211	136	.2454	69	.0028	118	.0750	167	.4208
149	.4944	88	.0226	137	.2539	70	.0031	119	.0787	168	.4306
150	.5056	89	.0241	138	.2625	71	.0033	120	.0825	169	.4405
		90	.0258	139	.2712	72	.0036	121	.0865	170	.4503
n = 25		91	.0275	140	.2801	73	.0040	122	.0907	171	.4602
29	.0001	92	.0294	141	.2891	74	.0043	123	.0950	172	.4702
37	.0002	93	.0313	142	.2983	75	.0047	124	.0994	173	.4801
41	.0003	94	.0334	143	.3075	76	.0051	125	.1039	174	.4900
43	.0004	95	.0355	144	.3169	77	.0055	126	.1086	175	.5000
45	.0005	96	.0377	145	.3264	78	.0060	127	.1135		
47	.0006	97	.0401	146	.3360	79	.0065	128	.1185		
48	.0007	98	.0426	147	.3458	80	.0070	129	.1236		

6. táblázat (folytatás)

T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P
n = 27		n = 27		n = 27		n = 28		n = 28		n = 28	
39	.0001	105	.0218	154	.2066	74	.0012	123	.0349	172	.2466
47	.0002	106	.0231	155	.2135	75	.0013	124	.0368	173	.2538
52	.0003	107	.0246	156	.2205	76	.0015	125	.0387	174	.2611
55	.0004	108	.0260	157	.2277	77	.0016	126	.0407	175	.2685
57	.0005	109	.0276	158	.2349	78	.0017	127	.0428	176	.2759
59	.0006	110	.0292	159	.2423	79	.0019	128	.0450	177	.2835
61	.0007	111	.0309	160	.2498	80	.0020	129	.0473	178	.2912
62	.0008	112	.0327	161	.2574	81	.0022	*130	.0496	179	.2990
64	.0009	113	.0346	162	.2652	82	.0024	131	.0521	180	.3068
65	.0010	114	.0366	163	.2730	83	.0026	132	.0546	181	.3148
66	.0011	115	.0386	164	.2810	84	.0028	133	.0573	182	.3228
67	.0012	116	.0407	165	.2890	85	.0030	134	.0600	183	.3309
68	.0014	117	.0430	166	.2972	86	.0033	135	.0628	184	.3391
69	.0015	118	.0453	167	.3055	87	.0035	136	.0657	185	.3474
70	.0016	*119	.0477	168	.3138	88	.0038	137	.0688	186	.3557
71	.0018	120	.0502	169	.3223	89	.0041	138	.0719	187	.3641
72	.0019	121	.0528	170	.3308	90	.0044	139	.0751	188	.3725
73	.0021	122	.0555	171	.3395	91	.0048	140	.0785	189	.3811
74	.0023	123	.0583	172	.3482	92	.0051	141	.0819	190	.3896
75	.0025	124	.0613	173	.3570	93	.0055	142	.0855	191	.3983
76	.0027	125	.0643	174	.3659	94	.0059	143	.0891	192	.4070
77	.0030	126	.0674	175	.3748	95	.0064	144	.0929	193	.4157
78	.0032	127	.0707	176	.3838	96	.0068	145	.0968	194	.4245
79	.0035	128	.0741	177	.3929	97	.0073	146	.1008	195	.4333
80	.0038	129	.0776	178	.4020	98	.0078	147	.1049	196	.4421
81	.0041	130	.0812	179	.4112	99	.0084	148	.1091	197	.4510
82	.0044	131	.0849	180	.4204	100	.0089	149	.1135	198	.4598
83	.0048	132	.0888	181	.4297	101	.0096	150	.1180	199	.4687
84	.0052	133	.0927	182	.4390	102	.0102	151	.1225	200	.4777
85	.0056	134	.0968	183	.4483	103	.0109	152	.1273	201	.4866
86	.0060	135	.1010	184	.4577	104	.0116	153	.1321	202	.4955
87	.0065	136	.1054	185	.4670	105	.0124	154	.1370	203	.5045
88	.0070	137	.1099	186	.4764	106	.0132	155	.1421		
89	.0075	138	.1145	187	.4859	107	.0140	156	.1473	n = 29	
90	.0081	139	.1193	188	.4953	108	.0149	157	.1526	50	.0001
91	.0087	140	.1242	189	.5047	109	.0159	158	.1580	59	.0002
92	.0093	141	.1292			110	.0168	159	.1636	65	.0003
93	.0100	142	.1343	n = 28		111	.0179	160	.1693	68	.0004
94	.0107	143	.1396	44	.0001	112	.0190	161	.1751	71	.0005
95	.0115	144	.1450	53	.0002	113	.0201	162	.1810	73	.0006
96	.0123	145	.1506	58	.0003	114	.0213	163	.1870	75	.0007
97	.0131	146	.1563	61	.0004	115	.0226	164	.1932	76	.0008
98	.0140	147	.1621	64	.0005	116	.0239	165	.1995	78	.0009
99	.0150	148	.1681	66	.0006	117	.0252	166	.2059	79	.0010
100	.0159	149	.1742	68	.0007	118	.0267	167	.2124	80	.0011
101	.0170	150	.1804	69	.0008	119	.0282	168	.2190	81	.0012
102	.0181	151	.1868	70	.0009	120	.0298	169	.2257	82	.0013
103	.0193	152	.1932	72	.0010	121	.0314	170	.2326	83	.0014
104	.0205	153	.1999	73	.0011	122	.0331	171	.2395	84	.0015

6. táblázat (folytatás)

T	P	T	P	T	P	T	P	T	P	T	P
n = 29		n = 29		n = 29		n = 30		n = 30		n = 30	
85	.0016	134	.0362	183	.2340	90	.0013	139	.0275	188	.1854
86	.0018	135	.0380	184	.2406	91	.0014	140	.0288	189	.1909
87	.0019	136	.0399	185	.2473	92	.0015	141	.0303	190	.1965
88	.0021	137	.0418	186	.2541	93	.0016	142	.0318	191	.2022
89	.0022	138	.0439	187	.2611	94	.0017	143	.0333	192	.2081
90	.0024	139	.0460	188	.2681	95	.0019	144	.0349	193	.2140
91	.0026	*140	.0482	189	.2752	96	.0020	145	.0366	194	.2200
92	.0028	141	.0504	190	.2824	97	.0022	146	.0384	195	.2261
93	.0030	142	.0528	191	.2896	98	.0023	147	.0402	196	.2323
94	.0032	143	.0552	192	.2970	99	.0025	148	.0420	197	.2386
95	.0035	144	.0577	193	.3044	100	.0027	149	.0440	198	.2449
96	.0037	145	.0603	194	.3120	101	.0029	150	.0460	199	.2514
97	.0040	146	.0630	195	.3196	102	.0031	*151	.0481	200	.2579
98	.0043	147	.0658	196	.3272	103	.0033	152	.0502	201	.2646
99	.0046	148	.0687	197	.3350	104	.0036	153	.0524	202	.2713
100	.0049	149	.0716	198	.3428	105	.0038	154	.0547	203	.2781
101	.0053	150	.0747	199	.3507	106	.0041	155	.0571	204	.2849
102	.0057	151	.0778	200	.3586	107	.0044	156	.0595	205	.2919
103	.0061	152	.0811	201	.3666	108	.0047	157	.0621	206	.2989
104	.0065	153	.0844	202	.3747	109	.0050	158	.0647	207	.3060
105	.0069	154	.0879	203	.3828	110	.0053	159	.0674	208	.3132
106	.0074	155	.0914	204	.3909	111	.0057	160	.0701	209	.3204
107	.0079	156	.0951	205	.3991	112	.0060	161	.0730	210	.3277
108	.0084	157	.0988	206	.4074	113	.0064	162	.0759	211	.3351
109	.0089	158	.1027	207	.4157	114	.0068	163	.0790	212	.3425
110	.0095	159	.1066	208	.4240	115	.0073	164	.0821	213	.3500
111	.0101	160	.1107	209	.4324	116	.0077	165	.0853	214	.3576
112	.0108	161	.1149	210	.4408	117	.0082	166	.0886	215	.3652
113	.0115	162	.1191	211	.4492	118	.0087	167	.0920	216	.3728
114	.0122	163	.1235	212	.4576	119	.0093	168	.0955	217	.3805
115	.0129	164	.1280	213	.4661	120	.0098	169	.0990	218	.3883
116	.0137	165	.1326	214	.4745	121	.0104	170	.1027	219	.3961
117	.0145	166	.1373	215	.4830	122	.0110	171	.1065	220	.4039
118	.0154	167	.1421	216	.4915	123	.0117	172	.1103	221	.4118
119	.0163	168	.1471	217	.5000	124	.0124	173	.1143	222	.4197
120	.0173	169	.1521			125	.0131	174	.1183	223	.4276
121	.0183	170	.1572	n = 30		126	.0139	175	.1225	224	.4356
122	.0193	171	.1625	55	.0001	127	.0147	176	.1267	225	.4436
123	.0204	172	.1679	66	.0002	128	.0155	177	.1311	226	.4516
124	.0216	173	.1733	71	.0003	129	.0164	178	.1355	227	.4596
125	.0228	174	.1789	75	.0004	130	.0173	179	.1400	228	.4677
126	.0240	175	.1846	78	.0005	131	.0182	180	.1447	229	.4758
127	.0253	176	.1904	80	.0006	132	.0192	181	.1494	230	.4838
128	.0267	177	.1963	82	.0007	133	.0202	182	.1543	231	.4919
129	.0281	178	.2023	84	.0008	134	.0213	183	.1592	232	.5000
130	.0296	179	.2085	85	.0009	135	.0225	184	.1642		
131	.0311	180	.2147	87	.0010	136	.0236	185	.1694		
132	.0328	181	.2210	88	.0011	137	.0249	186	.1746		
133	.0344	182	.2274	89	.0012	138	.0261	187	.1799		

7. táblázat. A Mann-Whitney próba kritikus értékei p szinten, és n1 és n2 mintanagyságoknál

n_1	p	$n_2 = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.005	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	.01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2
	.025	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	.05	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5
	.10	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	.005	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4
3	.01	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6
	.025	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
	.05	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	12
	.10	1	2	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14	15	16
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4
	.005	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	7	8	9
4	.01	0	0	0	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7	9	8	9	10	10	11
	.025	0	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	12	13	14	15
	.05	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19
	.10	1	2	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	21	22	23
	.001	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8
	.005	0	0	0	1	2	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14
5	.01	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	.025	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	18	19	20	21
	.05	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	26
	.10	2	3	5	6	8	9	11	13	14	16	18	19	21	23	24	26	28	29	31
	.001	0	0	0	0	0	0	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	.005	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19
6	.01	0	0	2	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23
	.025	0	2	3	4	6	7	9	11	12	14	15	17	18	20	22	23	25	26	28
	.05	1	3	4	6	8	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	27	29	31	33
	.10	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	35	37	39
	.001	0	0	0	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17
	.005	0	0	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20	22	23	25
7	.01	0	1	2	4	5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22	24	25	27	29
	.025	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
	.05	1	3	5	7	9	12	14	16	18	20	22	25	27	29	31	34	36	38	40
	.10	2	5	7	9	12	14	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	42	44	47
	.001	0	0	0	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22
	.005	0	0	2	3	5	7	8	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	29	31
8	.01	0	1	3	5	7	8	10	12	14	16	18	21	23	25	27	29	31	33	35
	.025	1	3	5	7	9	11	14	16	18	20	23	25	27	30	32	35	37	39	42
	.05	2	4	6	9	11	14	16	19	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	48
	.10	3	6	8	11	14	17	20	23	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
	.001	0	0	0	2	3	4	6	8	9	11	13	15	16	18	20	22	24	26	27
	.005	0	1	2	4	6	8	10	12	14	17	19	21	23	25	28	30	32	34	37
9	.01	0	2	4	6	8	10	12	15	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	41
	.025	1	3	5	8	11	13	16	18	21	24	27	29	32	35	38	40	43	46	49
	.05	2	5	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
	.10	3	6	10	13	16	19	23	26	29	32	36	39	42	46	49	53	56	59	63

7. táblázat (folytatás)

n_1	p	$n_2 = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	1	2	4	6	7	9	11	13	15	18	20	22	24	26	28	30	33
	.005	0	1	3	5	7	10	12	14	17	19	22	25	27	30	32	35	38	40	43
10	.01	0	2	4	7	9	12	14	17	20	23	25	28	31	34	37	39	42	45	48
	.025	1	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	34	37	40	43	46	49	53	56
	.05	2	5	8	12	15	18	21	25	28	32	35	38	42	45	49	52	56	59	63
	.10	4	7	11	14	18	22	25	29	33	37	40	44	48	52	55	59	63	67	71
	.001	0	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	21	23	25	28	30	33	35	38
	.005	0	1	3	6	8	11	14	17	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49
11	.01	0	2	5	8	10	13	16	19	23	26	29	32	35	38	42	45	48	51	54
	.025	1	4	7	10	14	17	20	24	27	31	34	38	41	45	48	52	56	59	63
	.05	2	6	9	13	17	20	24	28	32	35	39	43	47	51	55	58	62	66	70
	.10	4	8	12	16	20	24	28	32	37	41	45	49	53	58	62	66	70	74	79
	.001	0	0	1	3	5	8	10	13	15	18	21	24	26	29	32	35	38	41	43
	.005	0	2	4	7	10	13	16	19	22	25	28	32	35	38	42	45	48	52	55
12	.01	0	3	6	9	12	15	18	22	25	29	32	36	39	43	47	50	54	57	61
	.025	2	5	8	12	15	19	23	27	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70
	.05	3	6	10	14	18	22	27	31	35	39	43	48	52	56	61	65	69	73	78
	.10	5	9	13	18	22	27	31	36	40	45	50	54	59	64	68	73	78	82	87
	.001	0	0	2	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	43	46	49
	.005	0	2	4	8	11	14	18	21	25	28	32	35	39	43	46	50	54	58	61
13	.01	1	3	6	10	13	17	21	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
	.025	2	5	9	13	17	21	25	29	34	38	42	46	51	55	60	64	68	73	77
	.05	3	7	11	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	66	71	76	81	85
	.10	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	75	80	85	90	95
	.001	0	0	2	4	7	10	13	16	20	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55
	.005	0	2	5	8	12	16	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	64	68
14	.01	1	3	7	11	14	18	23	27	31	35	39	44	48	52	57	61	66	70	74
	.025	2	6	10	14	18	23	27	32	37	41	46	51	56	60	65	70	75	79	84
	.05	4	8	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	78	83	88	93
	.10	5	11	16	21	26	32	37	42	48	53	59	64	70	75	81	86	92	98	103
	.001	0	0	2	5	8	11	15	18	22	25	29	33	37	41	44	48	52	56	60
	.005	0	3	6	9	13	17	21	25	30	34	38	43	47	52	56	61	65	70	74
15	.01	1	4	8	12	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	67	71	76	81
	.025	2	6	11	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	71	76	81	86	91
	.05	4	8	13	19	24	29	34	40	45	51	56	62	67	73	78	84	89	95	101
	.10	6	11	17	23	28	34	40	46	52	58	64	69	75	81	87	93	99	105	111
	.001	0	0	3	6	9	12	16	20	24	28	32	36	40	44	49	53	57	61	66
	.005	0	3	6	10	14	19	23	28	32	37	42	46	51	56	61	66	71	75	80
16	.01	1	4	8	13	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77	83	88
	.025	2	7	12	16	22	27	32	38	43	48	54	60	65	71	76	82	87	93	99
	.05	4	9	15	20	26	31	37	43	49	55	61	66	72	78	84	90	96	102	108
	.10	6	12	18	24	30	37	43	49	55	62	68	75	81	87	94	100	107	113	120
	.001	0	1	3	6	10	14	18	22	26	30	35	39	44	48	53	58	62	67	71
	.005	0	3	7	11	16	20	25	30	35	40	45	50	55	61	66	71	76	82	87
17	.01	1	5	9	14	19	24	29	34	39	45	50	56	61	67	72	78	83	89	94
	.025	3	7	12	18	23	29	35	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106
	.05	4	10	16	21	27	34	40	46	52	58	65	71	78	84	90	97	103	110	116
	.10	7	13	19	26	32	39	46	53	59	66	73	80	86	93	100	107	114	121	128
	.001	0	1	4	7	11	15	19	24	28	33	38	43	47	52	57	62	67	72	77
	.005	0	3	7	12	17	22	27	32	38	43	48	54	59	65	71	76	82	88	93
18	.01	1	5	10	15	20	25	31	37	42	48	54	60	66	71	77	83	89	95	101
	.025	3	8	13	19	25	31	37	43	49	56	62	68	75	81	87	94	100	107	113
	.05	5	10	17	23	29	36	42	49	56	62	69	76	83	89	96	103	110	117	124
	.10	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	78	85	92	99	107	114	121	129	136

7. táblázat (folytatás)

n_1	p	$n_2 = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	1	4	8	12	16	21	26	30	35	41	46	51	56	61	67	72	78	83
	.005	1	4	8	13	18	23	29	34	40	46	52	58	64	70	75	82	88	94	100
19	.01	2	5	10	16	21	27	33	39	45	51	57	64	70	76	83	89	95	102	108
	.025	3	8	14	20	26	33	39	46	53	59	66	73	79	86	93	100	107	114	120
	.05	5	11	18	24	31	38	45	52	59	66	73	81	88	95	102	110	117	124	131
	.10	8	15	22	29	37	44	52	59	67	74	82	90	98	105	113	121	129	136	144
	.001	0	1	4	8	13	17	22	27	33	38	43	49	55	60	66	71	77	83	89
	.005	1	4	9	14	19	25	31	37	43	49	55	61	68	74	80	87	93	100	106
20	.01	2	6	11	17	23	29	35	41	48	54	61	68	74	81	88	94	101	108	115
	.025	3	9	15	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	99	106	113	120	128
	.05	5	12	19	26	33	40	48	55	63	70	78	85	93	101	108	116	124	131	139
	.10	8	16	23	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	120	128	136	144	152

8. táblázat. A Kruskal-Wallis próbastatisztika kritikus értékei k = 3 és n1 ≤ n2 ≤ n3 ≤ 5 értékekre

Mintanagyságok			Kritikus érték		Mintanagyságok			Kritikus érték	
n_1	n_2	n_3		α	n_1	n_2	n_3		α
2	1	1	2.7000	0.500				4.7000	0.101
2	2	1	3.6000	0.200	4	4	1	6.6667	0.010
2	2	2	4.5714	0.067				6.1667	0.022
			3.7143	0.200				4.9667	0.048
3	1	1	3.2000	0.300				4.8667	0.054
3	2	1	4.2857	0.100				4.1667	0.082
			3.8571	0.133				4.0667	0.102
3	2	2	5.3572	0.029	4	4	2	7.0364	0.006
			4.7143	0.048				6.8727	0.011
			4.5000	0.067				5.4545	0.046
			4.4643	0.105				5.2364	0.052
3	3	1	5.1429	0.043				4.5545	0.098
			4.5714	0.100				4.4455	0.103
			4.0000	0.129	4	4	3	7.1439	0.010
3	3	2	6.2500	0.011				7.1364	0.011
			5.3611	0.032				5.5985	0.049
			5.1389	0.061				5.5758	0.051
			4.5556	0.100				4.5455	0.099
			4.2500	0.121				4.4773	0.102
3	3	3	7.2000	0.004	4	4	4	7.6538	0.008
			6.4889	0.011				7.5385	0.011
			5.6889	0.029				5.6923	0.049
			5.6000	0.050				5.6538	0.054
			5.0667	0.086				4.6539	0.097
			4.6222	0.100				4.5001	0.104
4	1	1	3.5714	0.200	5	1	1	3.8571	0.143
4	2	1	4.8214	0.057	5	2	1	5.2500	0.036
			4.5000	0.076				5.0000	0.048
			4.0179	0.114				4.4500	0.071
4	2	2	6.0000	0.014				4.2000	0.095
			5.3333	0.033				4.0500	0.119
			5.1250	0.052	5	2	2	6.5333	0.008
			4.4583	0.100				6.1333	0.013
			4.1667	0.105				5.1600	0.034
4	3	1	5.8333	0.021				5.0400	0.056
			5.2083	0.050				4.3733	0.090
			5.0000	0.057				4.2933	0.122
			4.0556	0.093	5	3	1	6.4000	0.012
			3.8889	0.129				4.9600	0.048
4	3	2	6.4444	0.008				4.8711	0.052
			6.3000	0.011				4.0178	0.095
			5.4444	0.046				3.8400	0.123
			5.4000	0.051	5	3	2	6.9091	0.009
			4.5111	0.098				6.8218	0.010
			4.4444	0.102				5.2509	0.049
4	3	3	6.7455	0.010				5.1055	0.052
			6.7091	0.013				4.6509	0.091
			5.7909	0.046				4.4945	0.101
			5.7273	0.050	5	3	3	7.0788	0.009
			4.7091	0.092				6.9818	0.011

8. táblázat (folytatás)

Mintanagyságok			Kritikus érték		Mintanagyságok			Kritikus érték	
n_1	n_2	n_3	Critical value	α	n_1	n_2	n_3	Critical value	α
5	3	3	5.6485	0.049	5	5	1	6.8364	0.011
			5.5152	0.051				5.1273	0.046
			4.5333	0.097				4.9091	0.053
			4.4121	0.109				4.1091	0.086
5	4	1	6.9545	0.008				4.0364	0.105
			6.8400	0.011	5	5	2	7.3385	0.010
			4.9855	0.044				7.2692	0.010
			4.8600	0.056				5.3385	0.047
			3.9873	0.098				5.2462	0.051
			3.9600	0.102				4.6231	0.097
5	4	2	7.2045	0.009				4.5077	0.100
			7.1182	0.010	5	5	3	7.5780	0.010
			5.2727	0.049				7.5429	0.010
			5.2682	0.050				5.7055	0.046
			4.5409	0.098				5.6264	0.051
			4.5182	0.101				4.5451	0.100
5	4	3	7.4449	0.010				4.5363	0.102
			7.3949	0.011	5	5	4	7.8229	0.010
			5.6564	0.049				7.7914	0.010
			5.6308	0.050				5.6657	0.049
			4.5487	0.099				5.6429	0.050
			4.5231	0.103				4.5229	0.099
5	4	4	7.7604	0.009				4.5200	0.101
			7.7440	0.011	5	5	5	8.0000	0.009
			5.6571	0.049				7.9800	0.010
			5.6176	0.050				5.7800	0.049
			4.6187	0.100				5.6600	0.051
			4.5527	0.102				4.5600	0.100
5	5	1	7.3091	0.009				4.5000	0.102

9. táblázat. A Spearman rang korreláció kritikus értékei egyoldalú ($\alpha(1)$) és kétoldalú ($\alpha(2)$) próbánál

$\alpha(2)$:	0.50	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
$\alpha(1)$:	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
n									
4	0.600	1.000	1.000						
5	0.500	0.800	0.900	1.000	1.000				
6	0.371	0.657	0.829	0.886	0.943	1.000	1.000		
7	0.321	0.571	0.714	0.786	0.893	0.929	0.964	1.000	1.000
8	0.310	0.524	0.643	0.738	0.833	0.881	0.905	0.952	0.976
9	0.267	0.483	0.600	0.700	0.783	0.833	0.867	0.917	0.933
10	0.248	0.455	0.564	0.648	0.745	0.794	0.830	0.879	0.903
11	0.236	0.427	0.536	0.618	0.709	0.755	0.800	0.845	0.873
12	0.217	0.406	0.503	0.587	0.678	0.727	0.769	0.818	0.846
13	0.209	0.385	0.484	0.560	0.648	0.703	0.747	0.791	0.824
14	0.200	0.367	0.464	0.538	0.626	0.679	0.723	0.771	0.802
15	0.189	0.354	0.446	0.521	0.604	0.654	0.700	0.750	0.779
16	0.182	0.341	0.429	0.503	0.582	0.635	0.679	0.729	0.762
17	0.176	0.328	0.414	0.485	0.566	0.615	0.662	0.713	0.748
18	0.170	0.317	0.401	0.472	0.550	0.600	0.643	0.695	0.728
19	0.165	0.309	0.391	0.460	0.535	0.584	0.628	0.677	0.712
20	0.161	0.299	0.380	0.447	0.520	0.570	0.612	0.662	0.696
21	0.156	0.292	0.370	0.435	0.508	0.556	0.599	0.648	0.681
22	0.152	0.284	0.361	0.425	0.496	0.544	0.586	0.634	0.667
23	0.148	0.278	0.353	0.415	0.486	0.532	0.573	0.622	0.654
24	0.144	0.271	0.344	0.406	0.476	0.521	0.562	0.610	0.642
25	0.142	0.265	0.337	0.398	0.466	0.511	0.551	0.598	0.630
26	0.138	0.259	0.331	0.390	0.457	0.501	0.541	0.587	0.619
27	0.136	0.255	0.324	0.382	0.448	0.491	0.531	0.577	0.608
28	0.133	0.250	0.317	0.375	0.440	0.483	0.522	0.567	0.598
29	0.130	0.245	0.312	0.368	0.433	0.475	0.513	0.558	0.589
30	0.128	0.240	0.306	0.362	0.425	0.467	0.504	0.549	0.580
31	0.126	0.236	0.301	0.356	0.418	0.459	0.496	0.541	0.571
32	0.124	0.232	0.296	0.350	0.412	0.452	0.489	0.533	0.563
33	0.121	0.229	0.291	0.345	0.405	0.446	0.482	0.525	0.554
34	0.120	0.225	0.287	0.340	0.399	0.439	0.475	0.517	0.547
35	0.118	0.222	0.283	0.335	0.394	0.433	0.468	0.510	0.539
36	0.116	0.219	0.279	0.330	0.388	0.427	0.462	0.504	0.533
37	0.114	0.216	0.275	0.325	0.383	0.421	0.456	0.497	0.526
38	0.113	0.212	0.271	0.321	0.378	0.415	0.450	0.491	0.519
39	0.111	0.210	0.267	0.317	0.373	0.410	0.444	0.485	0.513
40	0.110	0.207	0.264	0.313	0.368	0.405	0.439	0.479	0.507
41	0.108	0.204	0.261	0.309	0.364	0.400	0.433	0.473	0.501
42	0.107	0.202	0.257	0.305	0.359	0.395	0.428	0.468	0.495
43	0.105	0.199	0.254	0.301	0.355	0.391	0.423	0.463	0.490
44	0.104	0.197	0.251	0.298	0.351	0.386	0.419	0.458	0.484
45	0.103	0.194	0.248	0.294	0.347	0.382	0.414	0.453	0.479
46	0.102	0.192	0.246	0.291	0.343	0.378	0.410	0.448	0.474
47	0.101	0.190	0.243	0.288	0.340	0.374	0.405	0.443	0.469
48	0.100	0.188	0.240	0.285	0.336	0.370	0.401	0.439	0.465
49	0.098	0.186	0.238	0.282	0.333	0.366	0.397	0.434	0.460
50	0.097	0.184	0.235	0.279	0.329	0.363	0.393	0.430	0.456

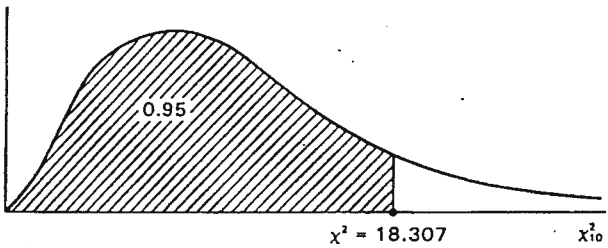
9. táblázat (folytatás)

α(2):	0.50	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
α(1):	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
n									
51	0.096	0.182	0.233	0.276	0.326	0.359	0.390	0.426	0.451
52	0.095	0.180	0.231	0.274	0.323	0.356	0.386	0.422	0.447
53	0.095	0.179	0.228	0.271	0.320	0.352	0.382	0.418	0.443
54	0.094	0.177	0.226	0.268	0.317	0.349	0.379	0.414	0.439
55	0.093	0.175	0.224	0.266	0.314	0.346	0.375	0.411	0.435
56	0.092	0.174	0.222	0.264	0.311	0.343	0.372	0.407	0.432
57	0.091	0.172	0.220	0.261	0.308	0.340	0.369	0.404	0.428
58	0.090	0.171	0.218	0.259	0.306	0.337	0.366	0.400	0.424
59	0.089	0.169	0.216	0.257	0.303	0.334	0.363	0.397	0.421
60	0.089	0.168	0.214	0.255	0.300	0.331	0.360	0.394	0.418
61	0.088	0.166	0.213	0.252	0.298	0.329	0.357	0.391	0.414
62	0.087	0.165	0.211	0.250	0.296	0.326	0.354	0.388	0.411
63	0.086	0.163	0.209	0.248	0.293	0.323	0.351	0.385	0.408
64	0.086	0.162	0.207	0.246	0.291	0.321	0.348	0.382	0.405
65	0.085	0.161	0.206	0.244	0.289	0.318	0.346	0.379	0.402
66	0.084	0.160	0.204	0.243	0.287	0.316	0.343	0.376	0.399
67	0.084	0.158	0.203	0.241	0.284	0.314	0.341	0.373	0.396
68	0.083	0.157	0.201	0.239	0.282	0.311	0.338	0.370	0.393
69	0.082	0.156	0.200	0.237	0.280	0.309	0.336	0.368	0.390
70	0.082	0.155	0.198	0.235	0.278	0.307	0.333	0.365	0.388
71	0.081	0.154	0.197	0.234	0.276	0.305	0.331	0.363	0.385
72	0.081	0.153	0.195	0.232	0.274	0.303	0.329	0.360	0.382
73	0.080	0.152	0.194	0.230	0.272	0.301	0.327	0.358	0.380
74	0.080	0.151	0.193	0.229	0.271	0.299	0.324	0.355	0.377
75	0.079	0.150	0.191	0.227	0.269	0.297	0.322	0.353	0.375
76	0.078	0.149	0.190	0.226	0.267	0.295	0.320	0.351	0.372
77	0.078	0.148	0.189	0.224	0.265	0.293	0.318	0.349	0.370
78	0.077	0.147	0.188	0.223	0.264	0.291	0.316	0.346	0.368
79	0.077	0.146	0.186	0.221	0.262	0.289	0.314	0.344	0.365
80	0.076	0.145	0.185	0.220	0.260	0.287	0.312	0.342	0.363
81	0.076	0.144	0.184	0.219	0.259	0.285	0.310	0.340	0.361
82	0.075	0.143	0.183	0.217	0.257	0.284	0.308	0.338	0.359
83	0.075	0.142	0.182	0.216	0.255	0.282	0.306	0.336	0.357
84	0.074	0.141	0.181	0.215	0.254	0.280	0.305	0.334	0.355
85	0.074	0.140	0.180	0.213	0.252	0.279	0.303	0.332	0.353
86	0.074	0.139	0.179	0.212	0.251	0.277	0.301	0.330	0.351
87	0.073	0.139	0.177	0.211	0.250	0.276	0.299	0.328	0.349
88	0.073	0.138	0.176	0.210	0.248	0.274	0.298	0.327	0.347
89	0.072	0.137	0.175	0.209	0.247	0.272	0.296	0.325	0.345
90	0.072	0.136	0.174	0.207	0.245	0.271	0.294	0.323	0.343
91	0.072	0.135	0.173	0.206	0.244	0.269	0.293	0.321	0.341
92	0.071	0.135	0.173	0.205	0.243	0.268	0.291	0.319	0.339
93	0.071	0.134	0.172	0.204	0.241	0.267	0.290	0.318	0.338
94	0.070	0.133	0.171	0.203	0.240	0.265	0.288	0.316	0.336
95	0.070	0.133	0.170	0.202	0.239	0.264	0.287	0.314	0.334
96	0.070	0.132	0.169	0.201	0.238	0.262	0.285	0.313	0.332
97	0.069	0.131	0.168	0.200	0.236	0.261	0.284	0.311	0.331
98	0.069	0.130	0.167	0.199	0.235	0.260	0.282	0.310	0.329
99	0.068	0.130	0.166	0.198	0.234	0.258	0.281	0.308	0.327
100	0.068	0.129	0.165	0.197	0.233	0.257	0.279	0.307	0.326

10. táblázat. A Kolmogorov-Szmirnov próba kritikus értékei egyoldalú és kétoldalú tesztben

Egyoldalú / Kétoldalú	$p = 0.90$ $p = 0.80$	0.95 0.90	0.975 0.95	0.99 0.98	0.995 0.99
$n = 1$	.900	.950	.975	.990	.995
2	.684	.776	.842	.900	.929
3	.565	.636	.708	.785	.829
4	.493	.565	.624	.689	.734
5	.447	.509	.563	.627	.669
6	.410	.468	.519	.577	.617
7	.381	.436	.483	.538	.576
8	.358	.410	.454	.507	.542
9	.339	.387	.430	.480	.513
10	.323	.369	.409	.457	.489
11	.308	.352	.391	.437	.468
12	.296	.338	.375	.419	.449
13	.285	.325	.361	.404	.432
14	.275	.314	.349	.390	.418
15	.266	.304	.338	.377	.404
16	.258	.295	.327	.366	.392
17	.250	.286	.318	.355	.381
18	.244	.279	.309	.346	.371
19	.237	.271	.301	.337	.361
20	.232	.265	.294	.329	.352
21	.226	.259	.287	.321	.344
22	.221	.253	.281	.314	.337
23	.216	.247	.275	.307	.330
24	.212	.242	.269	.301	.323
25	.208	.238	.264	.295	.317
26	.204	.233	.259	.290	.311
27	.200	.229	.254	.284	.305
28	.197	.225	.250	.279	.300
29	.193	.221	.246	.275	.295
30	.190	.218	.242	.270	.290
31	.187	.214	.238	.266	.285
32	.184	.211	.234	.262	.281
33	.182	.208	.231	.258	.277
34	.179	.205	.227	.254	.273
35	.177	.202	.224	.251	.269
36	.174	.199	.221	.247	.265
37	.172	.196	.218	.244	.262
38	.170	.194	.215	.241	.258
39	.168	.191	.213	.238	.255
40	.165	.189	.210	.235	.252
$n > 40$:	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

11. táblázat. A $\chi 2$ próba kritikus értékei p=0.1, p=0.05, p=0.025, p=0.01 és p=0.005 szinten



df	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750
6	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	18.549	21.026	23.336	26.217	28.300
13	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
35	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
40	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
45	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
50	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

12. táblázat. A Fisher exakt próba valószínűségi szintjei. Vastagon szedett számok mutatják b kritikus értékét, amely még épen szignifikáns a jelölt szinten. Az apró számok mutatják a próba exakt szignifikanciáját, ha b egyenlő vagy kisebb a vastagon szedett számnál

		Valószínűség			
	a	0.05	0.025	0.01	0.005
$A = 3$ $B = 3$	3	0.050	—	—	—
$A = 4$ $B = 4$	4	0.014	0.014	—	—
3	4	0.029	—	—	—
$A = 5$ $B = 5$	5	1.024	1.024	0.004	0.004
	4	0.024	0.024	—	—
4	5	1.048	0.008	0.008	—
	4	0.040	—	—	—
3	5	0.018	0.018	—	—
2	5	0.048	—	—	—
$A = 6$ $B = 6$	6	2.030	1.008	1.008	0.001
	5	1.040	0.008	0.008	—
	4	0.030	—	—	—
5	6	1.015^{+}	1.015^{+}	0.002	0.002
	5	0.013	0.013	—	—
	4	0.045^{+}	—	—	—
4	6	1.033	0.005^{-}	0.005^{-}	0.005^{-}
	5	0.024	0.024	—	—
3	6	0.012	0.012	—	—
	5	0.048	—	—	—
2	6	0.036	—	—	—
$A = 7$ $B = 7$	7	3.035^{-}	2.010^{+}	1.002	1.002
	6	1.015^{-}	1.015^{-}	0.002	0.002
	5	0.010^{+}	0.010^{+}	—	—
	4	0.035^{-}	—	—	—
6	7	2.021	2.021	1.005^{-}	1.005^{-}
	6	1.025^{+}	0.004	0.004	0.004
	5	0.016	0.016	—	—
	4	0.049	—	—	—
5	7	2.045^{+}	1.010^{+}	0.001	0.001
	6	1.045^{+}	0.008	0.008	—
	5	0.027	—	—	—
4	7	1.024	1.024	0.003	0.003
	6	0.015^{+}	0.015^{+}	—	—
	5	0.045^{+}	—	—	—
3	7	0.008	0.008	0.008	—
	6	0.033	—	—	—
2	7	0.028	—	—	—
$A = 8$ $B = 8$	8	4.038	3.013	2.003	2.003
	7	2.020	2.020	1.005^{+}	0.001
	6	1.020	1.020	0.003	0.003
	5	0.013	0.013	—	—
	4	0.038	—	—	—

12. táblázat (folytatás)

		Valószínűség			
	a	0.05	0.025	0.01	0.005
A = 8 B = 7	8	3.026	2.007	2.007	1.001
	7	2.035⁻	1.009	1.009	0.001
	6	1.032	0.006	0.006	—
	5	0.019	0.019	—	—
6	8	2.015⁻	2.015⁻	1.003	1.003
	7	1.016	1.016	0.002	0.002
	6	0.009	0.009	0.009	—
	5	0.028	—	—	—
5	8	2.035⁻	1.007	1.007	0.001
	7	1.032	0.005⁻	0.005⁻	0.005⁻
	6	0.016	0.016	—	—
	5	0.044	—	—	—
4	8	1.018	1.018	0.002	0.002
	7	0.010⁺	0.010⁺	—	—
	6	0.030	—	—	—
3	8	0.006	0.006	0.006	—
	7	0.024	0.024	—	—
2	8	0.022	0.022	—	—
A = 9 B = 9	9	5.041	4.015⁻	3.005⁻	3.005⁻
	8	3.025⁻	3.025⁻	2.008	1.002
	7	2.028	1.008	1.008	0.001
	6	1.025⁻	1.025⁻	0.005⁻	0.005⁻
	5	0.015⁻	0.015⁻	—	—
	4	0.041	—	—	—
8	9	4.029	3.009	3.009	2.002
	8	3.043	2.013	1.003	1.003
	7	2.044	1.012	0.002	0.002
	6	1.036	0.007	0.007	—
	5	0.020	0.020	—	—
7	9	3.019	3.019	2.005⁻	2.005⁻
	8	2.024	2.024	1.006	0.001
	7	1.020	1.020	0.003	0.003
	6	0.010⁺	0.010⁺	—	—
	5	0.029	—	—	—
6	9	3.044	2.011	1.002	1.002
	8	2.047	1.011	0.001	0.001
	7	1.035⁻	0.006	0.006	—
	6	0.017	0.017	—	—
	5	0.042	—	—	—
5	9	2.027	1.005⁻	1.005⁻	1.005⁻
	8	1.023	1.023	0.003	0.003
	7	0.010⁺	0.010⁺	—	—
	6	0.028	—	—	—
4	9	1.014	1.014	0.001	0.001
	8	0.007	0.007	0.007	—
	7	0.021	0.021	—	—
	6	0.049	—	—	—
3	9	1.045⁺	0.005⁻	0.005⁻	0.005⁻
	8	0.018	0.018	—	—
	7	0.045⁺	—	—	—
2	9	0.018	0.018	—	—

12. táblázat (folytatás)

		Valószínűség			
	a	0.05	0.025	0.01	0.005
$A = 10$ $B = 10$	10	6.043	5.016	4.005$^+$	3.002
	9	4.029	3.010$^-$	3.010$^-$	2.003
	8	3.035$^-$	2.012	1.003	1.003
	7	2.035$^-$	1.010$^-$	1.010$^-$	0.002
	6	1.029	0.005$^+$	0.005$^+$	—
	5	0.016	0.016	—	—
	4	0.043	—	—	—
9	10	5.033	4.011	3.003	3.003
	9	4.050$^-$	3.017	2.005$^-$	2.005$^-$
	8	2.019	2.019	1.004	1.004
	7	1.015$^-$	1.015$^-$	0.002	0.002
	6	1.040	0.006	0.006	—
	5	0.022	0.022	—	—
8	10	4.023	4.023	3.007	2.002
	9	3.032	2.009	2.009	1.002
	8	2.031	1.008	1.008	0.001
	7	1.023	1.023	0.004	0.004
	6	0.011	0.011	—	—
	5	0.029	—	—	—
7	10	3.015$^-$	3.015$^-$	2.003	2.003
	9	2.018	2.018	1.004	1.004
	8	1.013	1.013	0.002	0.002
	7	1.036	0.006	0.006	—
	6	0.017	0.017	—	—
	5	0.041	—	—	—
6	10	3.036	2.008	2.008	1.001
	9	2.036	1.008	1.008	0.001
	8	1.024	1.024	0.003	0.003
	7	0.010$^+$	0.010$^+$	—	—
	6	0.026	—	—	—
5	10	2.022	2.022	1.004	1.004
	9	1.017	1.017	0.002	0.002
	8	1.047	0.007	0.007	—
	7	0.019	0.019	—	—
	6	0.042	—	—	—
4	10	1.011	1.011	0.001	0.001
	9	1.041	0.005$^-$	0.005$^-$	0.005$^-$
	8	0.015$^-$	0.015$^-$	—	—
	7	0.035$^-$	—	—	—
3	10	1.038	0.003	0.003	0.003
	9	0.014	0.014	—	—
	8	0.035$^-$	—	—	—
2	10	0.015$^+$	0.015$^+$	—	—
	9	0.045$^+$	—	—	—
$A = 11$ $B = 11$	11	7.045$^+$	6.018	5.006	4.002
	10	5.032	4.012	3.004	3.004
	9	4.040	3.015$^-$	2.004	2.004
	8	3.043	2.015$^-$	1.004	1.004
	7	2.040	1.012	0.002	0.002
	6	1.032	0.006	0.006	—
	5	0.018	0.018	—	—
	4	0.045$^+$	—	—	—

12. táblázat (folytatás)

		Valószínűség			
	a	0.05	0.025	0.01	0.005
A = 11 B = 10	11	6.035⁺	5.012	4.004	4.004
	10	4.021	4.021	3.007	2.002
	9	3.024	3.024	2.007	1.002
	8	2.023	2.023	1.006	0.001
	7	1.017	1.017	0.003	0.003
	6	1.043	0.009	0.009	—
	5	0.023	0.023	—	—
9	11	5.026	4.008	4.006	3.002
	10	4.038	3.012	2.003	2.003
	9	3.040	2.012	1.003	1.003
	8	2.035⁻	1.009	1.009	0.001
	7	1.025⁻	1.025⁻	0.004	0.004
	6	0.012	0.012	—	—
	5	0.030	—	—	—
8	11	4.018	4.018	3.005⁻	3.005⁻
	10	3.024	3.024	2.006	1.001
	9	2.022	2.022	1.005⁻	1.005⁻
	8	1.015⁻	1.015⁻	0.002	0.002
	7	1.037	0.007	0.007	—
	6	0.017	0.017	—	—
	5	0.040	—	—	—
7	11	4.043	3.011	2.002	2.002
	10	3.047	2.013	1.002	1.002
	9	2.039	1.009	1.009	0.001
	8	1.025⁻	1.025⁻	0.004	0.004
	7	0.010⁺	0.010⁺	—	—
	6	0.025⁻	0.025⁻	—	—
6	11	3.029	2.006	2.006	1.001
	10	2.028	1.005⁺	1.005⁺	0.001
	9	1.018	1.018	0.002	0.002
	8	1.043	0.007	0.007	—
	7	0.017	0.017	—	—
	6	0.037	—	—	—
5	11	2.018	2.018	1.003	1.003
	10	1.013	1.013	0.001	0.001
	9	1.036	0.005⁻	0.005⁻	0.005⁻
	8	0.013	0.013	—	—
	7	0.029	—	—	—
4	11	1.009	1.009	1.009	0.001
	10	1.033	0.004	0.004	0.004
	9	0.011	0.011	—	—
	8	0.026	—	—	—
3	11	1.003	0.003	0.003	0.003
	10	0.011	0.011	—	—
	9	0.027	—	—	—
2	11	0.013	0.013	—	—
	10	0.038	—	—	—

12. táblázat (folytatás)

		Valószínűség			
	a	0.05	0.025	0.01	0.005
A = 12 B = 12	12	8.047	7.019	6.007	5.002
	11	6.034	5.014	4.005⁻	4.005⁻
	10	5.045⁻	4.018	3.006	2.002
	9	4.050⁻	3.020	2.006	1.001
	8	3.050⁻	2.018	1.005⁻	1.005⁻
	7	2.045⁻	1.014	0.002	0.002
	6	1.034	0.007	0.007	—
	5	0.019	0.019	—	—
	4	0.047	—	—	—
11	12	7.037	6.014	5.005⁻	5.005⁻
	11	5.024	5.024	4.006	3.002
	10	4.029	3.010⁺	2.003	2.003
	9	3.030	2.009	2.009	1.002
	8	2.026	1.007	1.007	0.001
	7	1.019	1.019	0.003	0.003
	6	1.045⁻	0.009	0.009	—
	5	0.024	0.024	—	—
10	12	6.029	5.010⁻	5.010⁻	4.003
	11	5.043	4.015⁺	3.005⁻	3.005⁻
	10	4.048	3.017	2.005⁻	2.005⁻
	9	3.046	2.015⁻	1.004	1.004
	8	2.038	1.010⁺	0.002	0.002
	7	1.026	0.005⁻	0.005⁻	0.005⁻
	6	0.012	0.012	—	—
	5	0.030	—	—	—
9	12	5.021	5.021	4.006	3.002
	11	4.029	3.009	3.009	2.002
	10	3.029	2.008	2.008	1.002
	9	2.024	2.024	1.006	0.001
	8	1.016	1.016	0.002	0.002
	7	1.037	0.007	0.007	—
	6	0.017	0.017	—	—
	5	0.039	—	—	—
8	12	5.049	4.014	3.004	3.004
	11	3.018	3.018	2.004	2.004
	10	2.015⁺	2.015⁺	1.003	1.003
	9	2.040	1.010⁻	1.010⁻	0.001
	8	1.025⁻	1.025⁻	0.004	0.004
	7	0.010⁺	0.010⁺	—	—
	6	0.024	0.024	—	—
7	12	4.036	3.009	3.009	2.002
	11	3.038	2.010⁻	2.010⁻	1.002
	10	2.029	1.006	1.006	0.001
	9	1.017	1.017	0.002	0.002
	8	1.040	0.007	0.007	—
	7	0.016	0.016	—	—
	6	0.034	—	—	—

12. táblázat (folytatás)

		Valószínűség			
	n	0.05	0.025	0.01	0.005
$A = 12$ $B = 6$	12	3.025⁻	3.025⁻	2.005⁻	2.005⁻
	11	2.022	2.022	1.004	1.004
	10	1.013	1.013	0.002	0.002
	9	1.032	0.005⁻	0.005⁻	0.005⁻
	8	0.011	0.011	—	—
	7	0.025⁻	0.025⁻	—	—
	6	0.050⁻	—	—	—
5	12	2.015⁻	2.015⁻	1.002	1.002
	11	1.010⁻	1.010⁻	1.010⁻	0.001
	10	1.028	0.003	0.003	0.003
	9	0.009	0.009	0.009	—
	8	0.020	0.020	—	—
	7	0.041	—	—	—
4	12	2.050	1.007	1.007	0.001
	11	1.027	0.003	0.003	0.003
	10	0.008	0.008	0.008	—
	9	0.019	0.019	—	—
	8	0.038	—	—	—
3	12	1.029	0.002	0.002	0.002
	11	0.009	0.009	0.009	—
	10	0.022	0.022	—	—
	9	0.044	—	—	—
2	12	0.011	0.011	—	—
	11	0.033	—	—	—
$A = 13$ $B = 13$	13	9.048	8.020	7.007	6.003
	12	7.037	6.015⁺	5.006	4.002
	11	6.048	5.021	4.008	3.002
	10	4.024	4.024	3.008	2.002
	9	3.024	3.024	2.008	1.002
	8	2.021	2.021	1.006	0.001
	7	2.048	1.015⁺	0.003	0.003
	6	1.037	0.007	0.007	—
	5	0.020	0.020	—	—
	4	0.048	—	—	—
12	13	8.039	7.015⁻	6.005⁺	5.002
	12	6.027	5.010⁻	5.010⁻	4.003
	11	5.033	4.013	3.004	3.004
	10	4.036	3.013	2.004	2.004
	9	3.034	2.011	1.003	1.003
	8	2.029	1.008	1.008	0.001
	7	1.020	1.020	0.004	0.004
	6	1.046	0.010⁻	0.010⁻	—
	5	0.024	0.024	—	—
11	13	7.031	6.011	5.003	5.003
	12	6.048	5.018	4.006	3.002
	11	4.021	4.021	3.007	2.002
	10	3.021	3.021	2.006	1.001
	9	3.050⁻	2.017	1.004	1.004
	8	2.040	1.011	0.002	0.002
	7	1.027	0.005⁻	0.005⁻	0.005⁻
	6	0.013	0.013	—	—
	5	0.030	—	—	—

12. táblázat (folytatás)

		Valószínűség			
	a	0.05	0.025	0.01	0.005
$A = 13$ $B = 10$	13	6.024	6.024	5.007	4.002
	12	5.035⁻	4.012	3.003	3.003
	11	4.037	3.012	2.003	2.003
	10	3.033	2.010⁺	1.002	1.002
	9	2.026	1.006	1.006	0.001
	8	1.017	1.017	0.003	0.003
	7	1.038	0.007	0.007	—
	6	0.017	0.017	—	—
	5	0.038	—	—	—
9	13	5.017	5.017	4.005⁻	4.005⁻
	12	4.023	4.023	3.007	2.001
	11	3.022	3.022	2.006	1.001
	10	2.017	2.017	1.004	1.004
	9	2.040	1.010⁺	0.001	0.001
	8	1.025⁻	1.025⁻	0.004	0.004
	7	0.010⁺	0.010⁺	—	—
	6	0.023	0.023	—	—
	5	0.049	—	—	—
8	13	5.042	4.012	3.003	3.003
	12	4.047	3.014	2.003	2.003
	11	3.041	2.011	1.002	1.002
	10	2.029	1.007	1.007	0.001
	9	1.017	1.017	0.002	0.002
	8	1.037	0.006	0.006	—
	7	0.015⁻	0.015⁻	—	—
	6	0.032	—	—	—
7	13	4.031	3.007	3.007	2.001
	12	3.031	2.007	2.007	1.001
	11	2.022	2.022	1.004	1.004
	10	1.012	1.012	0.002	0.002
	9	1.029	0.004	0.004	0.004
	8	0.010⁺	0.010⁺	—	—
	7	0.022	0.022	—	—
	6	0.044	—	—	—
6	13	3.021	3.021	2.004	2.004
	12	2.017	2.017	1.003	1.003
	11	2.046	1.010⁻	1.010⁻	0.001
	10	1.024	1.024	0.003	0.003
	9	1.050⁻	0.008	0.008	—
	8	0.017	0.017	—	—
	7	0.034	—	—	—
5	13	2.012	2.012	1.002	1.002
	12	2.044	1.008	1.008	0.001
	11	1.022	1.022	0.002	0.002
	10	1.047	0.007	0.007	—
	9	0.015⁻	0.015⁻	—	—
	8	0.029	—	—	—
4	13	2.044	1.006	1.006	0.000
	12	1.022	1.022	0.002	0.002
	11	0.006	0.006	0.006	—
	10	0.015⁻	0.015⁻	—	—
	9	0.029	—	—	—

12. táblázat (folytatás)

		Valószínűség			
	a	0.05	0.025	0.01	0.005
$A = 13$ $B = 3$	13	1.025	1.025	0.002	0.002
	12	0.007	0.007	0.007	—
	11	0.018	0.018	—	—
	10	0.036	—	—	—
2	13	0.010^-	0.010^-	0.010^-	—
	12	0.029	—	—	—
$A = 14$ $B = 14$	14	10.049	9.020	8.008	7.003
	13	8.036	7.016	6.005	5.002
	12	6.023	6.023	5.009	4.003
	11	5.027	4.011	3.004	3.004
	10	4.028	3.011	2.003	2.003
	9	3.027	2.009	2.009	1.002
	8	2.023	2.023	1.005	0.001
	7	1.016	1.016	0.003	0.003
	6	1.038	0.008	0.008	—
	5	0.020	0.020	—	—
	4	0.049	—	—	—
13	14	9.041	8.016	7.006	6.002
	13	7.029	6.011	5.004	5.004
	12	6.037	5.015^+	4.005^+	3.002
	11	5.041	4.017	3.006	2.001
	10	4.041	3.016	2.005^-	2.005^-
	9	3.038	2.013	1.003	1.003
	8	2.031	1.009	1.009	0.001
	7	1.021	1.021	0.004	0.004
	6	1.048	0.010^+	—	—
	5	0.025^-	0.025^-	—	—
12	14	8.033	7.012	6.004	6.004
	13	6.021	6.021	5.007	4.002
	12	5.025^+	4.009	4.009	3.003
	11	4.026	3.009	3.009	2.002
	10	3.024	3.024	2.007	1.002
	9	2.019	2.019	1.005^-	1.005^-
	8	2.042	1.012	0.002	0.002
	7	1.028	0.005^+	0.005^+	—
	6	0.013	0.013	—	—
	5	0.030	—	—	—
11	14	7.026	6.009	6.009	5.003
	13	6.039	5.014	4.004	4.004
	12	5.043	4.016	3.005^-	3.005^-
	11	4.042	3.015^-	2.004	2.004
	10	3.036	2.011	1.003	1.003
	9	2.027	1.007	1.007	0.001
	8	1.017	1.017	0.003	0.003
	7	1.038	0.007	0.007	—
	6	0.017	0.017	—	—
	5	0.038	—	—	—

12. táblázat (folytatás)

		Valószínűség			
		#	0.05	0.025	0.01	0.005
$A = 14$ $B = 10$		14	6.020	6.020	5.006	4.002
		13	5.028	4.009	4.009	3.002
		12	4.028	3.009	3.009	2.002
		11	3.024	3.024	2.007	1.001
		10	2.018	2.018	1.004	1.004
		9	2.040	1.011	0.002	0.002
		8	1.024	1.024	0.004	0.004
		7	0.010⁻	0.010⁻	0.010⁻	—
		6	0.022	0.022	—	—
		5	0.047	—	—	—
	9	14	6.047	5.014	4.004	4.004
		13	4.018	4.018	3.005⁻	3.005⁻
		12	3.017	3.017	2.004	2.004
		11	3.042	2.012	1.002	1.002
		10	2.029	1.007	1.007	0.001
		9	1.017	1.017	0.002	0.002
		8	1.036	0.006	0.006	—
		7	0.014	0.014	—	—
		6	0.030	—	—	—
	8	14	5.036	4.010⁻	4.010⁻	3.002
		13	4.039	3.011	2.002	2.002
		12	3.032	2.008	2.008	1.001
		11	2.022	2.022	1.005⁻	1.005⁻
		10	2.048	1.012	0.002	0.002
		9	1.026	0.004	0.004	0.004
		8	0.009	0.009	0.009	—
		7	0.020	0.020	—	—
		6	0.040	—	—	—
	7	14	4.026	3.006	3.006	2.001
		13	3.025	2.006	2.006	1.001
		12	2.017	2.017	1.003	1.003
		11	2.041	1.009	1.009	0.001
		10	1.021	1.021	0.003	0.003
		9	1.043	0.007	0.007	—
		8	0.015⁻	0.015⁻	—	—
		7	0.030	—	—	—
	6	14	3.018	3.018	2.003	2.003
		13	2.014	2.014	1.002	1.002
		12	2.037	1.007	1.007	0.001
		11	1.018	1.018	0.002	0.002
		10	1.038	0.005⁺	0.005⁺	—
		9	0.012	0.012	—	—
		8	0.024	0.024	—	—
		7	0.044	—	—	—
	5	14	2.010⁺	2.010⁺	1.001	1.001
		13	2.037	1.006	1.006	0.001
		12	1.017	1.017	0.002	0.002
		11	1.038	0.005⁻	0.005⁻	0.005⁻
		10	0.011	0.011	—	—
		9	0.022	0.022	—	—
		8	0.040	—	—	—

12. táblázat (folytatás)

		Valószínűség			
	n	0.05	0.025	0.01	0.005
$A = 14$ $B = 4$	14	2.039	1.005⁻	1.005⁻	1.005⁻
	13	1.019	1.019	0.002	0.002
	12	1.044	0.005⁻	0.005⁻	0.005⁻
	11	0.011	0.011	—	—
	10	0.023	0.023	—	—
	9	0.041	—	—	—
3	14	1.022	1.022	0.001	0.001
	13	0.006	0.006	0.006	—
	12	0.015⁻	0.015⁻	—	—
	11	0.029	—	—	—
2	14	0.008	0.008	0.008	—
	13	0.025	0.025	—	—
	12	0.050	—	—	—
$A = 15$ $B = 15$	15	11.050⁻	10.021	9.008	8.003
	14	9.040	8.018	7.007	6.003
	13	7.025⁺	6.010⁺	5.004	5.004
	12	6.030	5.013	4.005⁻	4.005⁻
	11	5.033	4.013	3.005⁻	3.005⁻
	10	4.033	3.013	2.004	2.004
	9	3.030	2.010⁺	1.003	1.003
	8	2.025⁺	1.007	1.007	0.001
	7	1.018	1.018	0.003	0.003
	6	1.040	0.008	0.008	—
	5	0.021	0.021	—	—
	4	0.050⁻	—	—	—
14	15	10.042	9.017	8.006	7.002
	14	8.031	7.013	6.005⁻	6.005⁻
	13	7.041	6.017	5.007	4.002
	12	6.046	5.020	4.007	3.002
	11	5.048	4.020	3.007	2.002
	10	4.046	3.018	2.006	1.001
	9	3.041	2.014	1.004	1.004
	8	2.033	1.009	1.009	0.001
	7	1.022	1.022	0.004	0.004
	6	1.049	0.011	—	—
	5	0.025⁺	—	—	—
13	15	9.035⁻	8.013	7.035⁻	7.005⁻
	14	7.023	7.023	6.009	5.003
	13	6.029	5.011	4.004	4.004
	12	5.031	4.012	3.004	3.004
	11	4.030	3.011	2.003	2.003
	10	3.026	2.008	2.008	1.002
	9	2.020	2.020	1.005⁺	0.001
	8	2.043	1.013	0.002	0.002
	7	1.029	0.005⁺	0.005⁺	—
	6	0.013	0.013	—	—
	5	0.031	—	—	—

12. táblázat (folytatás)

		Valószínűség			
	a	0.05	0.025	0.01	0.005
$A = 15$ $B = 12$	15	8.028	7.010⁻	7.010⁻	6.003
	14	7.043	6.016	5.006	4.002
	13	6.049	5.019	4.007	3.002
	12	5.049	4.019	3.006	2.002
	11	4.045⁺	3.017	2.005⁻	2.005⁻
	10	3.038	2.012	1.003	1.003
	9	2.028	1.007	1.007	0.001
	8	1.018	1.018	0.003	0.003
	7	1.038	0.007	0.007	—
	6	0.017	0.017	—	—
	5	0.037	—	—	—
11	15	7.022	7.022	6.007	5.002
	14	6.032	5.011	4.003	4.003
	13	5.034	4.012	3.003	3.003
	12	4.032	3.010⁺	2.003	2.003
	11	3.026	2.008	2.006	1.002
	10	2.019	2.019	1.004	1.004
	9	2.040	1.011	0.002	0.002
	8	1.024	1.024	0.004	0.004
	7	1.049	0.010⁻	0.010⁻	—
	6	0.022	0.022	—	—
	5	0.046	—	—	—
10	15	6.017	6.017	5.005⁻	5.005⁻
	14	5.023	5.023	4.007	3.002
	13	4.022	4.022	3.007	2.001
	12	3.018	3.018	2.005⁻	2.005⁻
	11	3.042	2.013	1.003	1.003
	10	2.029	1.007	1.007	0.001
	9	1.015	1.016	0.002	0.002
	8	1.034	0.006	0.006	—
	7	0.013	0.013	—	—
	6	0.028	—	—	—
9	15	6.042	5.012	4.003	4.003
	14	5.047	4.015⁻	3.004	3.004
	13	4.042	3.013	2.003	2.003
	12	3.032	2.009	2.009	1.002
	11	2.021	2.021	1.005⁻	1.005⁻
	10	2.045⁻	1.011	0.002	0.002
	9	1.024	1.024	0.004	0.004
	8	1.048	0.009	0.009	—
	7	0.019	0.019	—	—
	6	0.037	—	—	—
8	15	5.032	4.008	4.008	3.002
	14	4.033	3.009	3.009	2.002
	13	3.026	2.006	2.006	1.001
	12	2.017	2.017	1.003	1.003
	11	2.037	1.008	1.008	0.001
	10	1.019	1.019	0.003	0.003
	9	1.038	0.006	0.006	—
	8	0.013	0.013	—	—
	7	0.026	—	—	—
	6	0.050⁻	—	—	—

12. táblázat (folytatás)

		Valószínűség				
		a	0.05	0.025	0.01	0.005
$A = 15$	$B = 7$	15	4.023	4.023	3.005⁻	3.005⁻
		14	3.021	3.021	2.004	2.004
		13	2.014	2.014	1.002	1.002
		12	2.032	1.007	1.007	0.001
		11	1.015⁺	1.015⁺	0.002	0.002
		10	1.032	0.005⁻	0.005⁻	0.005⁻
		9	0.010⁺	0.010⁺	—	—
		8	0.020	0.020	—	—
		7	0.038	—	—	—
	6	15	3.015⁺	3.015⁺	2.003	2.003
		14	2.011	2.011	1.002	1.002
		13	2.031	1.006	1.006	0.001
		12	1.014	1.014	0.002	0.002
		11	1.029	0.004	0.004	0.004
		10	0.009	0.009	0.009	—
		9	0.017	0.017	—	—
		8	0.032	—	—	—
	5	15	2.009	2.009	2.009	1.001
		14	2.032	1.005⁻	1.005⁻	1.005⁻
		13	1.014	1.014	0.001	0.001
		12	1.031	0.004	0.004	0.004
		11	0.008	0.008	0.008	—
		10	0.016	0.016	—	—
		9	0.030	—	—	—
	4	15	2.035⁺	1.004	1.004	1.004
		14	1.016	1.016	0.001	0.001
		13	1.037	0.004	0.004	0.004
		12	0.009	0.009	0.009	—
		11	0.018	0.018	—	—
		10	0.033	—	—	—
	3	15	1.020	1.020	0.001	0.001
		14	0.005⁻	0.005⁻	0.005⁻	0.005⁻
		13	0.012	0.012	—	—
		12	0.025⁻	0.025⁻	—	—
		11	0.043	—	—	—
	2	15	0.007	0.007	0.007	—
		14	0.022	0.022	—	—
		13	0.044	—	—	—

13. táblázat. A random előfordulási teszt alsó kritikus értékei p=0.05-nél

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2											2	2	2	2	2	2	2	2	2
3					2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
4				2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5			2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
6		2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
7		2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
8		2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7
9		2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
10		2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9
11		2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14

14. táblázat. A random előfordulási teszt felső kritikus értékei p=0.05-nél

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2																			
3																			
4				9	9														
5			9	10	10	11	11												
6			9	10	11	12	12	13	13	13	13								
7				11	12	13	13	14	14	14	14	15	15	15					
8				11	12	13	14	14	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17
9					13	14	14	15	16	16	16	17	17	18	18	18	18	18	18
10					13	14	15	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20
11					13	14	15	16	17	17	18	19	19	19	20	20	20	21	21
12					13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	21	22	22
13						15	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23
14						15	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	23	23	24
15						15	16	18	18	19	20	21	22	22	23	23	24	24	25
16							17	18	19	20	21	21	22	23	23	24	25	25	25
17							17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	25	26	26
18							17	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26	26	27
19							17	18	20	21	22	23	23	24	25	26	26	27	27
20							17	18	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27	28

15. táblázat. A Tukey-próba

f	α	h													
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.05	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1	50.6	52.0	53.2	54.3	55.4
	.01	90.0	135	164	186	202	216	227	237	246	253	260	266	272	277
2	.05	6.09	8.3	9.8	10.9	11.7	12.4	13.0	13.5	14.0	14.4	14.7	15.1	15.4	15.7
	.01	14.0	19.0	22.3	24.7	26.6	28.2	29.5	30.7	31.7	32.6	33.4	34.1	34.8	35.4
3	.05	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.2	10.4	10.5
	.01	8.26	10.6	12.2	13.3	14.2	15.0	15.6	16.2	16.7	17.1	17.5	17.9	18.2	18.5
4	.05	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66
	.01	6.51	8.12	9.17	9.96	10.6	11.1	11.5	11.9	12.3	12.6	12.8	13.1	13.3	13.5
5	.05	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72
	.01	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.2	10.5	10.7	10.9	11.1	11.2
6	.05	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14
	.01	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.49	9.65	9.81	9.95
7	.05	3.34	4.16	4.69	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76
	.01	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12
8	.05	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48
	.01	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55
9	.05	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28
	.01	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13
10	.05	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11
	.01	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.48	7.60	7.71	7.81
11	.05	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.99
	.01	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.26	7.36	7.46	7.56
12	.05	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40	5.51	5.62	5.71	5.80	5.88
	.01	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36

f	α	h													
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
13	.05	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79
	.01	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19
14	.05	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.72
	.01	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05
16	.05	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59
	.01	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82
18	.05	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50
	.01	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65
20	.05	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43
	.01	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.29	6.37	6.45	6.52
24	.05	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32
	.01	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33
30	.05	2.89	3.49	3.84	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21
	.01	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.56	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14
40	.05	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.74	4.82	4.91	4.98	5.05	5.11
	.01	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.27	5.39	5.50	5.60	5.69	5.77	5.84	5.90	5.96
60	.05	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00
	.01	3.76	4.28	4.60	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.79
120	.05	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.48	4.56	4.64	4.72	4.78	4.84	4.90
	.01	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.38	5.44	5.51	5.56	5.61
∞	.05	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80
	.01	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45

16. táblázat. A maximális F-próba

f	α	k								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	.05	9.60	15.5	20.6	25.2	29.5	33.6	37.5	41.4	44.6
	.01	23.2	37.	49.	59.	69.	79.	89.	97.	106.
5	.05	7.15	10.8	13.7	16.3	18.7	20.8	22.9	24.7	26.5
	.01	14.9	22.	28.	33.	38.	42.	46.	50.	54.
6	.05	5.82	8.38	10.4	12.1	13.7	15.0	16.3	17.5	18.6
	.01	11.1	15.5	19.1	22.	25.	27.	30.	32.	34.
7	.05	4.99	6.94	8.44	9.70	10.8	11.8	12.7	13.5	14.3
	.01	8.89	12.1	14.5	16.5	18.4	20.	22.	23.	24.
8	.05	4.43	6.00	7.18	8.12	9.03	9.78	10.5	11.1	11.7
	.01	7.50	9.9	11.7	13.2	14.5	15.8	16.9	17.9	18.9
9	.05	4.03	5.34	6.31	7.11	7.80	8.41	8.95	9.45	9.91
	.01	6.54	8.5	9.9	11.1	12.1	13.1	13.9	14.7	15.3
10	.05	3.72	4.85	5.67	6.34	6.92	7.42	7.87	8.28	8.66
	.01	5.85	7.4	8.6	9.6	10.4	11.1	11.8	12.4	12.9
12	.05	3.28	4.16	4.79	5.30	5.72	6.09	6.42	6.72	7.00
	.01	4.91	6.1	6.9	7.6	8.2	8.7	9.1	9.5	9.9
15	.05	2.86	3.54	4.01	4.37	4.68	4.95	5.19	5.40	5.59
	.01	4.07	4.9	5.5	6.0	6.4	6.7	7.1	7.3	7.5
20	.05	2.46	2.95	3.29	3.54	3.76	3.94	4.10	4.24	4.37
	.01	3.32	3.8	4.3	4.6	4.9	5.1	5.3	5.5	5.6
30	.05	2.07	2.40	2.61	2.78	2.91	3.02	3.12	3.21	3.29
	.01	2.63	3.0	3.3	3.4	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
60	.05	1.67	1.85	1.96	2.04	2.11	2.17	2.22	2.26	2.30
	.01	1.96	2.2	2.3	2.4	2.4	2.5	2.5	2.6	2.6
∞	.05	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00